Degré zéro des lois physiques

Considérations heuristiques

Bernard GUY
Ecole nationale supérieure des mines de Saint-Etienne
guy@emse.fr

Première version, Août 2012

Résumé

Les grandeurs de la physique apparaissent souvent par groupes de deux (par exemple les paires {champ électrique, champ magnétique}, {énergie, quantité de mouvement}, {charge, courant} etc.) ; on retrouve ces grandeurs dans des lois physiques se manifestant également en binômes (les équations de Maxwell vont par paires ; énergie et quantité de mouvement se retrouvent dans deux types d'équations, exprimant des conservations d'une part et des lois de forces d'autre part, etc.). Nous postulerons que ces constats révèlent des qualités fondamentales de nos représentations possibles du monde, à comprendre dans une « pensée de la relation » : nul sens à une grandeur seule, mais à une dualité de grandeurs, ou mieux à des *variations liées de deux grandeurs ;* et les points de vue possibles (spatial / temporel) sur ces variations peuvent eux-mêmes être échangés. Pour le temps et l'espace, le constat est le même : nul sens à une variable d'espace ou de temps seule, mais à leur dualité et à leurs variations associées. Sur cette base, nous proposons qu'une loi élémentaire de la physique relie les dérivées partielles de deux grandeurs en dualité, par rapport au temps et à l'espace respectivement. Du fait de la symétrie espace - temps rappelée à l'instant, l'échange, dans l'équation de la loi, des variables temporelles et spatiales, ou des deux grandeurs en dualité, donne une autre loi admissible. Cette approche permet de comprendre, *comme deux formes de la même loi*, des paires de lois de la physique a priori distinctes, et reliant chacune des combinaisons des dérivées temporelles et spatiales des grandeurs en dualité : ainsi les lois qui expriment des conservations d'une part, et celles qui expriment des fonctions de forces d'autre part, reliant des dérivées spatiales (dans des divergences dans le premier cas, dans des gradients dans le second), à des dérivées temporelles. Ainsi pouvons-nous interpréter la deuxième loi de Newton (la dérivée temporelle de la quantité de mouvement est égale au gradient de l'énergie) et la loi de la conservation de l'énergie (la divergence de la quantité de mouvement est égale à la dérivée temporelle de l'énergie) *comme deux formes de la même loi*. On peut lire de la même façon les diverses équations de Maxwell. Sous leur forme élémentaire, les lois proposées sont invariantes par transformation de Lorentz, et les grandeurs en dualité se transforment par des relations analogues à celles portant sur les coordonnées spatio-temporelles (on pourrait inversement parler du temps et de l'espace comme des fonctions des champs de grandeurs en dualité). L'ensemble de ces résultats est rendu possible en comprenant le temps comme relié aux mêmes degrés de liberté que les coordonnées spatiales. Sur la base du cadre conceptuel ainsi tracé sont proposées diverses pistes de recherche, en particulier celle d'explorer de nouvelles symétries dans les lois physiques.

Mots clés : grandeurs physiques en dualité ; temps ; espace ; dualité temps - espace ; paramètre temporel tri-dimensionnel ; loi élémentaire de la physique ; énergie ; quantité de mouvement ; équations de Maxwell ; seconde loi de Newton ; conservation de l'énergie ; symétrie ; pensée de la relation ; relativité ; mécanique quantique ; principe ergodique ; gravitation

Première partie : considérations générales

1. Introduction : degré zéro des lois physiques

Nous nous intéressons ici à ce que nous appelons *le degré zéro des lois physiques* ; cette dénomination s'éclairera dans la suite du texte. Le fondement de notre démarche est de postuler que, dans une loi élémentaire de la physique, les grandeurs associées au phénomène étudié doivent apparaître sous deux visages *f* et *g*, toujours en tandem. Cela se comprend dans une pensée de la relation en rappelant que, dans notre intelligence de l'espace et du temps (voir les travaux de l'auteur, par exemple : Guy, 2004, 2011), ce sont les phénomènes eux-mêmes qui nous servent à spécifier les concepts d'espace et de temps. Et la définition de ces derniers se fait toujours par l'association de deux points de vue en opposition l'un à l'autre. Dans ce cadre nous sommes amenés à donner un sens à trois composantes t_i pour le temps t : ce sont les coordonnées dans l'espace du point mobile repérant le temps, dans le même système d'axes que les coordonnées spatiales. Ainsi les phénomènes devront aussi être définis en dualité par deux points de vue ; nous pourrons parler - d'un point de vue « statique » ou spatial, et –d'un point de vue « dynamique » ou temporel ; l'important est de comprendre que les deux points de vue se définissent en opposition l'un à l'autre, les dénominations de *temporel* ou *spatial* pouvant s'échanger. On peut donner comme exemple la paire {champ électrostatique, champ magnétique} qui exprime deux points de vue associés sur une charge électrique suivant que l'on est fixe ou mobile par rapport à elle, et qui se transforment l'un dans l'autre lorsque l'observateur se déplace (ce qui est fixe ou mobile n'a pas de sens « absolu », mais il faut bien partir de quelque chose que l'on décide comme tel, fixe ou mobile ; cf. Guy, 2011). Les deux grandeurs couplées seront des vecteurs à trois dimensions (renvoyant aux trois dimensions de l'espace-temps de départ), à partir desquels on peut aussi, dans certaines conditions, définir des scalaires ; pour ce dernier cas, on peut citer l'exemple de la paire {énergie –scalaire associé au temps-, quantité de mouvement –vecteur associé aux coordonnées d'espace-}. Si, dans notre compréhension, les t_i représentent les variables temporelles intermédiaires et les x_j les variables spatiales (i et j varient de 1 à 3) la forme des lois physiques que nous attendons montrera des expressions du type fondamental suivant, où *f* et *g*, en dualité, seront des fonctions des t_i et des x_j :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \tag{1}$$

Où nous avons postulé une symétrie de comportement dans l'échange des indices i et j (pour une exposition dans un formalisme tensoriel, voir Guy, 2004). Cela a diverses conséquences ; en particulier, pour i = j, on a :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_i} = \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \qquad (2)$$

D'où encore, par sommation :

$$\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial t_i} - \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (3)$$

D'autres expressions sont envisageables en permutant les indices et les variables et en faisant diverses sommations. En définissant, à partir des trois composantes t_i, un scalaire par

$$t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \qquad (4)$$

on pourra encore écrire d'autres lois, sachant comme on l'a dit dans Guy (2010a), que la direction portant le vecteur t (t_1, t_2, t_3) et celle portant le vecteur vitesse v du phénomène étudié (vitesse de déplacements de repères, de charges etc.) doivent être les mêmes, voir Fig. 1 (sauf indication expresse, on ne fera pas la distinction typographique entre un vecteur et son module, par exemple entre $\vec{t}$ et $\boldsymbol{t}$ ou $|t|$, tous trois notés *t*, il n'y a en général pas de confusion possible). Les relations (3) apparaissent a priori comme une simple conséquence de (2) mais l'individualisation d'un paramètre scalaire t donnera tout son intérêt au fait de distinguer les unes et les autres : ainsi en faisant les sommations écrites en (3), on pourra faire apparaître de façon utile la dérivée par rapport au temps scalaire t ; on pourra aussi écrire l'opération de divergence (et non plus seulement l'opération de gradient comme dans (2)), et donner une nouvelle signification à l'ensemble de la relation, la comprenant comme relation de conservation ; ce point sera illustré dans la suite du texte.

Nous ne justifierons pas davantage la forme des lois qui sera validée par ses conséquences. Elle exprime a priori, comme nous l'avons dit, un certain nombre de caractères reliés à notre compréhension des concepts de temps et d'espace et des variables correspondantes. En particulier – nous insistons-, celui selon lequel nous ne pouvons donner un sens à un temps et à un lieu ponctuels et séparés : temps et espace sont toujours définis par des variations associées de grandeurs, *par des écarts reliés* (dans une pensée relationnelle et non substantielle ; voir aussi Dujardin et Guy, 2012 ; Bitbol, 2010). D'où la forme des équations sous forme différentielle, et, plus précisément, sous forme d'équations aux dérivées partielles. Comme pour temps et espace, *on ne peut rien dire d'absolu sur aucune des deux grandeurs en dualité* (ou sur les deux visages de la même grandeur), on ne peut que parler du lien entre les variations associées des deux. Dans un cadre de compréhension et un formalisme différents, Tsabary et Censor (2005) montrent que les deux premières équations de Maxwell dans le vide (contenant les termes en rotationnels) dérivent d'un principe analogue à (3). Fondamentalement, ces équations expriment que l'on égale des dérivées (ou, dans le rotationnel, des combinaisons des dérivées) du premier vecteur par rapport aux coordonnées d'espace, aux dérivées du second vecteur par rapport à la coordonnée de temps, et réciproquement (les deux autres équations de Maxwell en divergences sont des conséquences des deux premières). Il va de soi que les lois de la physique peuvent prendre des formes très variées suivant le degré de complexité des phénomènes à prendre en compte ; par loi élémentaire ou de degré zéro, nous voulons parler des lois fondamentales dont les combinaisons et les dérivations / intégrations vont permettre d'écrire toutes les lois utiles.

L'objet du présent texte est d'examiner le comportement des lois de type (1), (2) et (3) en examinant toutes les « contraintes » auxquelles elles nous paraissent devoir satisfaire. En particulier : - l'obtention de lois admissibles par échanges entre les variables spatiales et temporelles, - l'invariance par changement de repère. Ce faisant, nous allons déduire d'autres lois associées qui répondront toutes à de telles contraintes, et cela fournira de nouvelles justifications a posteriori au choix des formes annoncées. Différentes illustrations seront données qui renverront à des lois de la physique connues.

Le présent texte ne donne que les grandes lignes d'un programme de physique mathématique qui mériterait, pour être traité correctement, de très longs développements (d'où le sous-titre donné au texte). Pour la commodité, nous pourrons raisonner dans la suite sur la forme simplifiée des lois (2) et (3) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

avec une seule variable de temps et une seule variable d'espace (temps et espace scalaires ; en dimension 1 + 1), la généralisation à plusieurs variables d'espace et de temps ne posant a priori pas de problème si ce n'est la lourdeur du formalisme (la pertinence des formulations : gradient, divergence, rotationnel demande quant à elle la prise en compte de toutes les variables). Dans ce cas, la loi (5) contient les deux formes élémentaires (2) et (3) que nous avons posées au début et qui sont équivalentes.

2. Obtention de lois admissibles par échange des paramètres spatiaux et temporels

Nous avons postulé (Guy, 2010a) que, par échange des paramètres spatiaux et temporels dans une loi physique, on doit obtenir une autre loi *admissible* (il ne s'agit pas d'invariance de la loi comme nous avons pu l'écrire à l'occasion). Cela s'exprime en dimension 1 + 1 en disant que si on égale une variation d'une grandeur par rapport à t, à x donné, à la variation d'une autre grandeur en correspondance par rapport à x, à t donné, on peut égaler aussi les variations réciproques respectivement par rapport à x, à t donné et par rapport à t, à x donné. En renvoyant à une expérience concrète sur laquelle nous construisons les variables d'espace et de temps (le mouvement apparent du soleil par rapport à la terre par exemple) cela revient à dire de façon imagée : les deux points de vue sur le monde, celui obtenu depuis la terre avec le soleil comme horloge, et celui obtenu depuis le soleil avec la terre comme horloge sont également admissibles (la symétrie entre les rôles de x et t se comprend aussi en rappelant que ces paramètres sont définis et mesurés par le même phénomène). A partir des expressions (1) à (3), nous déduisons que les lois suivantes sont aussi des lois fondamentales :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial t_i} \qquad (6)$$

En particulier :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial g_i}{\partial t_i} \qquad (7)$$

Ou encore :

$$\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial t_i} = 0 \qquad (8)$$

Et dans le cas doublement scalaire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \qquad (9)$$

Où l'on a dérivé *f* par rapport aux variables d'espace et *g* par rapport aux variables de temps (uniques dans le dernier cas).

Les deux lois $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0$ constituent une paire de lois admissibles en correspondance, dans le sens où nous en avons parlé ci-dessus.

3. Invariance des lois sous l'action des transformations de Lorentz généralisées

Raisonnons sur le cas simplifié doublement scalaire et exprimons que la loi (5) doit être invariante dans un changement de référentiel galiléen R $\rightarrow$ R' (postulat 1 d'Einstein), le repère R' se déplaçant à la vitesse v par rapport au repère R ; en même temps, nous demandons que la loi respecte la constance de l'étalon de vitesse reliant les étalons d'espace et de temps (c'est l'équivalent du postulat 2 d'Einstein, voir Guy 2010a). On sait que, en rajoutant des contraintes d'homogénéité de l'espace et du temps, on obtient les transformations de Lorentz suivantes (que nous avons généralisées du point de vue vectoriel dans le travail cité à l'instant ; voir aussi l'Annexe 1 ; la condition d'isotropie de l'espace amène à des considérations que nous n'avons pas besoin de traiter ici) :

$$x' = ax + bt$$
$$t' = bx + at \qquad (10)$$

avec seulement deux coefficients *a* et *b*, et non quatre (exprimant la symétrie cachée entre t et x dont nous avons parlé ; on prend pour cela c = 1) qui dépendent de la vitesse v de déplacement entre les deux repères. Rappelons que l'on a

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad b = \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{11}$$

Où les symétries apparaissent pleinement avec c = 1, ce qui simplifie aussi les écritures. On peut retrouver les relations vectorielles proposées dans Guy, 2010a (Annexe 1), en remplaçant dans (10) x et x' par les vecteurs r (x_1, x_2, x_3) et r' (x'_1, x'_2, x'_3), et t et t' par les vecteurs t (t_1, t_2, t_3) et t' (t'_1, t'_2, t'_3). Les coefficients *a* et *b* sont des scalaires (v est le module de la vitesse) ; dans les expressions vectorielles, il apparaît des produits du type vr ou vt qui ne posent pas de problème car v, r et t sont parallèles (voir Guy, op.cit.).

Déterminons la loi de transformation liant (f', g') dans le nouveau repère à (f, g) dans le repère au repos, pour que la forme de la loi unissant *f* et *g* reste la même (postulat 1) c'est-à-dire que l'on ait encore :

$$\frac{\partial f'}{\partial t'} - \frac{\partial g'}{\partial x'} = 0 \tag{12}$$

Si l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

Dérivons *f* et *g* comme fonctions de x' et t'. En développant les termes de l'équation (5) on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

Les relations (10) donnent les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial t} = a \qquad\qquad \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial x} = b \tag{14}$$

Et (13) s'écrit alors :

$$a\frac{\partial f}{\partial t'} + b\frac{\partial f}{\partial x'} - a\frac{\partial g}{\partial x'} - b\frac{\partial g}{\partial t'} = 0 \tag{15}$$

On veut que cette dernière équation s'identifie à

$$\frac{\partial f'}{\partial t'} - \frac{\partial g'}{\partial x'} = 0 \tag{12}$$

On voit que c'est possible à condition d'écrire :

$$f' = af - bg$$
$$g' = -bf + ag \tag{16}$$

Le postulat sur la forme des lois, ajouté à la condition d'invariance de cette forme par changement de référentiel, permet donc d'écrire, pour la cohérence d'ensemble, des lois de transformation des grandeurs qui ressemblent (à des signes des coefficients près) aux transformations de Lorentz pour les coordonnées spatiales et temporelles (on retrouve dans les développements de la relativité standard de tels changements de signes dans les transformations de Lorentz pour des grandeurs quelconques en dualité, par rapport aux écritures pour les changements des coordonnées spatiales et temporelles). La réciproque est donnée plus loin. La démarche précédente s'applique également à la conservation des lois :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad (9) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f'}{\partial x'} - \frac{\partial g'}{\partial t'} = 0 \tag{17}$$

en échangeant t et x, et ceci est permis en particulier grâce à la symétrie des transformations de Lorentz elles-mêmes pour les variables spatiales et temporelles (deux coefficients seulement dans les relations (10)). L'ensemble des calculs précédents pourrait être repris en traitant des vecteurs et non des scalaires. Les démonstrations précédentes sont valables pour un jeu de coefficients (a, b) qui peut éventuellement changer (par exemple en imposant des conditions sur la constance de la vitesse de la lumière dans un seul sens de propagation, comme dans Elbaz, 1984), sans compromettre la conservation de la forme de la loi.

La forme des lois de transformation (16) obtenues et leur similitude avec les lois portant sur les variables spatiales et temporelles, est un argument a posteriori pour accorder des « visages », spatial et temporel, aux fonctions, et parler par exemple de *f* comme visage spatial et de *g* comme visage temporel (ou l'inverse) pour le phénomène décrit par la paire (*f*, *g*). Fondamentalement, tout *f'*, et tout *g'*, dans n'importe quel référentiel, contient les deux visages *f* et *g*, mais les noms sont donnés de façon circonstancielle en fonction du premier repère « au repos » où l'on se situe, et où l'on commence à « décider » ce qui est immobile et ce qui est mobile, et quelle grandeur on associe à cette mobilité ou immobilité. L'important est finalement que l'on peut autant échanger x et t dans (10), que f et g dans (16) : *ils sont dans la même dualité,* et définis en opposition l'un à l'autre, quels que soient les noms que l'on attribue à l'un ou l'autre (la notation tensorielle permettrait aussi de voir cela).

Réciproque

Quelle est la forme de la loi liant *f* à *g* et garantissant que des lois de transformation de type (10) et (16) sont vérifiées ? Peut-on retrouver une loi du type (5) ou (9) ? Essayons ici de retrouver une loi de type (9). Nous partons donc de

$$x' = ax + bt$$
$$t' = bx + at \qquad (10)$$

$$f' = af - bg$$
$$g' = -bf + ag \qquad (16)$$

A partir des relations (16) calculons deux quantités :

$$\frac{\partial f'}{\partial x'} = a\frac{\partial f}{\partial x'} - b\frac{\partial g}{\partial x'} \qquad (18)$$

$$\frac{\partial g'}{\partial t'} = -b\frac{\partial f}{\partial t'} + a\frac{\partial g}{\partial t'} \tag{19}$$

En vertu de (10), on peut comprendre les coefficients a et b comme :

$$a = \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial t} \qquad\qquad b = \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial x} \tag{20}$$

(ce sont les relations (14) déjà écrites). En portant alors les relations (20) dans (18) et (19) (sous réserve de choisir pour les valeurs de *a* et *b* les dérivées partielles utiles pour transformer les dérivées des fonctions *f* et *g* vues d'abord comme fonctions de x' et t', puis comme fonctions de x et t), et en sommant, on obtient :

$$\frac{\partial f'}{\partial x'} - \frac{\partial g'}{\partial t'} = a\frac{\partial f}{\partial x'} - b\frac{\partial g}{\partial x'} - b\frac{\partial f}{\partial t'} + a\frac{\partial g}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} \tag{21}$$

On a donc

$$\frac{\partial f'}{\partial x'} - \frac{\partial g'}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} \tag{22}$$

Ce dernier résultat exprime aussi bien la forme de la loi cherchée que son invariance sous l'action du changement de référentiel ; si l'on remarque que les relations de type (16) sont valables pour toutes formes de fonctions *f* et *g*, elles sont en particulier vérifiées pour des fonctions *f* et *g* nulles, et la valeur commune aux deux expressions dans la relation (21) est zéro. Soit :

$$\frac{\partial f'}{\partial x'} - \frac{\partial g'}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \tag{23}$$

La réciproque est démontrée pour la relation (9). On pourrait de même retrouver (5) par un calcul approprié, ou simplement par l'échange de x et t dans (9). Nous avons ainsi obtenu qu'*une condition nécessaire et suffisante pour qu'une loi soit invariante de Lorentz* (la transformation de Lorentz étant donnée) *est qu'elle ait la forme spécifiée donnée plus haut*, ou une forme mathématiquement équivalente, à des ordres dérivés ou intégrés par rapport à la formulation de départ (la démonstration faite en 1 + 1 dimensions devra être écrite en 3 + 3 dimensions). Nous pouvons aussi voir dans ce résultat *un lien fort entre pensée par relation et invariance de Lorentz.*

« Disparition » de l'espace et du temps

La parfaite similitude (aux signes des coefficients près) entre les équations (10) concernant les transformations des coordonnées d'espace et de temps, et les équations (16) concernant les transformations des deux visages *f* et *g* de la grandeur physique qui nous intéresse, n'est pas anodine. A la limite, du point de vue mathématique, on peut dire qu'on ne distingue pas les fonctions *f* et *g* d'un côté, et les variables *x* et *t* de l'autre. Les deux vecteurs *f* et *g* pourraient être utilisés en lieu et place de *x* et *t*. On pourrait dire que *x* et *t* sont des fonctions des champs *f* et *g* (et envisager des dérivées de *x* et *t* par rapport à *f* et *g*…). Cette parfaite symétrie entre (*x*, *t*) et (*f*, *g*) peut aussi être vue en éliminant les coefficients a et b entre les relations (10) et (16), ce qui donne :

$$a=\frac{xx'-tt'}{x^2-t^2}=\frac{ff'-tt'}{f^2-g^2} \qquad \text{et} \qquad b=\frac{t'x-x't}{x^2-t^2}=\frac{f'g-g'f}{f^2-g^2} \qquad (24)$$

(l'écriture de ces calculs est à reprendre lorsque l'on traite de vecteurs). Ces divers points de vue sont une façon de parler de la « disparition » du temps et de l'espace (« on n'a que des champs ») défendue par C. Rovelli (2006 ; voir aussi 2004). On notera la disparition *associée*, dans le même mouvement de pensée, des deux concepts de temps et d'espace (alors que le précédent auteur parle de deux « disparitions », de façons séparées). Il faudrait d'ailleurs, plutôt que de disparition, parler d'échange entre variables d'espace et temps d'un côté, et valeurs des deux champs de l'autre (ou de « déguisement » des uns dans les autres). Soulignons que *ceci ne serait pas possible de façon générale si on n'avait pas utilisé le caractère vectoriel intermédiaire associé à la variable temps*.

Cette démarche suppose aussi que l'on a découplé la définition des paramètres d'espace et de temps du champ de gravitation (alors que la théorie de la relativité générale suppose au contraire un lien essentiel entre les deux). Dans cet esprit, il faut considérer la ou les lois de la gravitation sur le même plan que les autres lois (voir aussi plus loin). Plutôt que d'émergence du temps et de l'espace (comme on l'entend parfois dire), il faut plutôt souligner qu'il s'agit d'un choix à faire au sein de la multiplicité des phénomènes, et qu'il y a plusieurs choix possibles : on peut appuyer la définition du temps et de l'espace sur les grandeurs associées à tel ou tel champ, le champ électromagnétique par exemple. Alors, au lieu d'utiliser des mètres et des secondes, on pourrait mesurer temps et espace avec les unités correspondantes. Ce qui fait que l'on utilise les mots d'espace et de temps est, à un moment donné, purement culturel : on a le droit d'appeler temps et espace ce que l'on veut à condition de le relier correctement au reste (nous ne discutons pas ici l'étape « préalable » qui suppose que l'on a choisi un marqueur unique pour passer de la multiplicité des temps à un temps « unique », précisément, pour un repère ; voir Guy, 2011). Lorsqu'on a affaire à plusieurs classes de phénomènes (mécanique, électromagnétique, gravitationnel …) dans une série de paires (f, g) (h, i) etc. on peut envisager de définir l'espace et le temps sur l'un ou l'autre de ces différents phénomènes, dans des associations {(f,g), (x,t)}, {(h,i),(x,t)} etc. On voit que peut se poser le problème de la compatibilité entre ces différentes associations. Il se peut qu'il n'y ait pas de compatibilité stricte (à moins de reprendre la définition des grandeurs définissant les champs pour que cela boucle) : est-ce un problème de ce type qui se pose dans le fait que l'impulsion d'une particule dans un champ magnétique ne coïncide pas avec la quantité de mouvement exprimé sans champ (Basdevant, 2002) ?

4. Correspondance entre relations en divergence (conservations) et relations en gradients (fonctions de forces) : deux formes des mêmes lois

• Les lois élémentaires « de degré zéro » ont été exprimées jusqu'à présent dans le cas général où l'on envisageait des variables temporelles à trois composantes, et des grandeurs physiques vectorielles à trois composantes. Il faut examiner un cas particulier intéressant et important où l'on veut exprimer les relations physiques avec un temps scalaire, avec intervention de grandeurs physiques dont certaines sont aussi scalaires ; c'est le cas de l'énergie par exemple. Cela va nous conduire vers les formulations en divergences et gradients d'emploi universel.

Raisonnons de façon générale et abstraite sur la paire (E, p) associant une grandeur scalaire E à un vecteur p, en prenant les notations de la mécanique dans la dualité {énergie, quantité de mouvement} ; nous ne cherchons pas pour l'instant à coller de façon exacte à ce domaine, c'est-à-dire à relier E et p à leurs structures « internes » en termes de masse et de vitesse. Comme nous l'avons expliqué dans Guy (2010a), nous pouvons construire pour le scalaire E un vecteur E à trois composantes E_i. On utilise pour cela la direction commune au vecteur temps t et au mouvement instantané permettant de définir la quantité de mouvement (Fig. 1) de cosinus directeurs α_1, α_2, et α_3 ; ces coefficients vérifient :

$$p_1 = \alpha_1 p, \qquad p_2 = \alpha_2 p, \qquad p_3 = \alpha_3 p \tag{25}$$

et

$$t_1 = \alpha_1 t, \qquad t_2 = \alpha_2 t, \qquad t_3 = \alpha_3 t \tag{26}$$

où t est le module du vecteur t (de composantes t_1, t_2, t_3) et p le module du vecteur p (de composantes p_1, p_2, p_3) ; on utilise les mêmes notations pour les vecteurs et leurs modules, comme indiqué ci-dessus. On construit alors les E_i d'après :

$$E_1 = \alpha_1 E, \qquad E_2 = \alpha_2 E, \qquad E_3 = \alpha_3 E \tag{27}$$

• Pour aller plus loin, nous avons besoin de relations reliant les scalaires E et t aux composantes correspondantes E_i et t_i des vecteurs associés, sous la forme:

$$\sum \frac{\partial E_i}{\partial t_i} = \frac{\partial E}{\partial t} \tag{28}$$

Pour le démontrer, calculons $\frac{\partial E_i}{\partial t_i}$ en utilisant les dérivées successives par rapport à *t* et t_i ; on a :

$$\frac{\partial \alpha_i E}{\partial t_i} = \frac{\partial \alpha_i E}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t_i} \tag{29}$$

Compte-tenu de la relation (4) liant t et t_i, on peut écrire :

$$\frac{\partial t}{\partial t_i} = \frac{\partial((\sum_{i=1}^{3} t_i^2)^{1/2})}{\partial t_i} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\sum_{i=1}^{3} t_i^2)^{1/2}} 2t_i = \frac{t_i}{t} \tag{30}$$

On a donc

$$\frac{\partial \alpha_i E}{\partial t_i} = \frac{t_i}{t} \frac{\partial \alpha_i E}{\partial t} \qquad (31)$$

On se place dans le cas d'une vitesse constante (permettant de construire des repères galiléens), c'est à dire d'une orientation momentanément constante des mouvements ; les coefficients α_i sont alors indépendants du temps et la relation précédente s'écrit:

$$\frac{\partial \alpha_i E}{\partial t_i} = \frac{t_i}{t} \alpha_i \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (32)$$

En utilisant les relations (26) on a alors

$$\frac{\partial \alpha_i E}{\partial t_i} = \alpha_i^2 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (33)$$

En sommant sur i on a

$$\sum_i \frac{\partial \alpha_i E}{\partial t_i} = \sum_i \alpha_i^2 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (34)$$

Nous avons bien la relation (28) annoncée (on trouve dans Tsabary et Censor, op.cit. une démonstration analogue).

• Appliquons maintenant les relations de degré zéro, soient (2) et (7), réécrites pour les deux vecteurs en dualité E (E_i) et p (p_i) :

$$\frac{\partial E_i}{\partial t_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \qquad (35) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial t_i} \qquad (36)$$

Regardons les premières relations (35) ; en sommant sur i et en utilisant la relation (28) on a :

$$\sum \frac{\partial E_i}{\partial t_i} = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \tag{37}$$

Nous pouvons aussi écrire la relation avec les notations habituelles et en utilisant, comme annoncé, uniquement les scalaires E et t :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = Div\vec{p} \tag{38}$$

Nous pouvons parler ici de conservation (voir plus loin les sens que l'on peut donner à ce mot) de E ou conservation de l'énergie.

• En utilisant les deuxièmes relations de degré zéro (36), on a :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial t_i}\frac{\partial t_i}{\partial t} = \frac{t}{t_i}\frac{\partial p_i}{\partial t_i} \tag{39}$$

On a donc $\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{t}{t_i}\frac{\partial E_i}{\partial x_i}$. Mais $E_i = t_i/t\ E$ d'après (26) et (27). On a donc

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x_i} \tag{40}$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = gr\vec{a}dE \tag{41}$$

C'est une expression analogue à la deuxième loi de Newton f = ma où la force est donnée ici par le gradient de l'énergie (a est l'accélération). On peut parler aussi de la « conservation » de p (ou conservation de la quantité de mouvement, dans le vocabulaire de la mécanique).

• Nous avons donc montré que les deux lois $\frac{\partial E}{\partial t}=Div\vec{p}$ et $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t}=gr\vec{a}dE$ relatives à la paire (E, p) sont deux expressions de la même loi. Un cadre conceptuel unique permet, en échangeant les paramètres spatiaux et temporels, de comprendre d'une part la conservation d'une quantité scalaire par rapport au scalaire temps, et d'autre part l'expression d'une fonction de force dérivant de cette quantité scalaire. Ce que nous venons de démontrer est valable pour toute paire (E, p) où E est un scalaire et p un vecteur, quels que soient les sens donnés à E et p.

• Dans la paire (E, p) précédente, l'un des termes est scalaire. Si maintenant on part de deux vecteurs (E, B) les résultats précédents peuvent s'appliquer à une nouvelle paire, construite en remplaçant l'un des deux vecteurs par son module. On s'attend alors à des lois du genre :

$$\frac{\partial \left|\vec{E}\right|}{\partial t}=Div\vec{B} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=gr\vec{a}d\left|\vec{E}\right| \tag{41}$$

Et par échange de E et B ou x et t :

$$\frac{\partial \left|\vec{B}\right|}{\partial t}=Div\vec{E} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=gr\vec{a}d\left|\vec{B}\right| \tag{42}$$

Où l'on a pris soin de distinguer les vecteurs de leurs modules ; il s'agit toujours d'écritures formelles, c'est-à-dire sans chercher pour l'instant de lien avec des équations connues, (en l'occurrence les équations de Maxwell). On peut enfin imaginer des équations qui relient uniquement des dérivées de scalaires (en repartant des relations de base (1) et les suivantes) à combiner éventuellement avec des paramètres temporels et spatiaux qui peuvent être aussi des scalaires (par exemple en coordonnées sphériques le scalaire $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ construit de façon analogue au temps scalaire t à partir des trois coordonnées t_i). Nous pouvons rajouter quelques commentaires suivants.

Un premier sens du mot conservation

Le mot de conservation a été utilisé dans la situation première où l'on s'intéresse à la *dérivée temporelle d'une grandeur*, égalée à un gradient ou une divergence par rapport aux variables d'espace d'une autre grandeur ; on dit que l'on écrit un bilan ou la conservation de la première grandeur. Il s'agit d'une conservation globale en tenant compte de « flux » dans l'espace, et dans l'écriture, il y a deux grandeurs, deux variables, et des dérivées par rapport aux deux variables. Ainsi pour la conservation de l'énergie ou de la quantité de mouvement. A cause de la symétrie entre variables spatiales et temporelles, on pourrait par généralisation parler aussi de conservation pour la grandeur qui fait l'objet de dérivation par rapport aux variables d'espace, comme on pouvait le dire dès l'écriture des relations (3) et (7). En faisant apparaître une seule variable d'espace r, on peut mieux voir cette symétrie possible d'écriture et de dénomination. De même pourrait-on généraliser le terme de divergence en englobant les deux grandeurs et leurs dérivées par rapport à toutes les variables spatiales et temporelles. C'est essentiellement une question de choix et d'usage : ainsi parle-t-on parfois de quadridivergence dans le formalisme quadridimensionnel de la relativité, en traitant toutes les dérivées spatiales et temporelles ensemble. En envisageant des vecteurs à 6 composantes on peut écrire deux types de divergences selon que l'on dérive les trois premières composantes et les trois secondes par rapport aux variables temporelles ou spatiales ; en égalant la somme de ces dérivées à zéro, on peut parler de conservation généralisée.

$$Div_{t,r}(f,g) = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial t_i} - \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (43)$$

$$Div_{r,t}(f,g) = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial t_i} = 0 \qquad (44)$$

La possibilité de définir un scalaire temporel à partir de trois coordonnées guide le choix du vocabulaire : on met en correspondance une dérivée temporelle unique avec un terme égal à la somme de trois dérivées par rapport aux trois variables d'espace que l'on nomme divergence ; la pratique duale serait d'écrire une expression du type :

$$\frac{\partial |f|}{\partial r} = Div_t g = \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial t_i} = 0 \qquad (45)$$

Cela nous relie au point suivant.

Dimensionalité

Nous avons jusqu'à présent utilisé des grandeurs couplées, chacune étant vectorielle avec ses trois composantes. En associant les deux vecteurs en dualité en un même objet mathématique, on pourrait définir un vecteur à 6 composantes. Lorsque l'on manipule des scalaires et des vecteurs, comme dans le couple {énergie, quantité de mouvement}, on peut aussi définir un vecteur à quatre composantes. On voit donc une certaine variété des dimensionnalités des systèmes et objets étudiés, mais toutes les expressions que l'on peut écrire sont reliées entre elles. Il pourra être intéressant d'expliciter de façon générale les correspondances entre les écritures, c'est-à-dire celles à 2 fois 3 dimensions (par exemple dans l'association des E_i et des p_i}), celles à 6 dimensions (dans un vecteur unique {E_i, p_i}) et celles à 4 dimensions (dans {E, p_i}). Dans notre compréhension, la représentation de base est tri-dimensionnelle, ou deux fois tri-dimensionnelle dans l'association dans une même paire des deux visages d'une grandeur vectorielle dans un seul espace à trois dimensions. Tout comme cela est pratiqué en relativité, les diverses écritures peuvent utiliser un formalisme tensoriel (voir aussi Guy, 2004) et une autre façon de voir les choses peut se faire en explicitant les passages entre les formalismes tensoriels pour les différentes dimensions. De nombreux auteurs ont discuté les relations entre les différentes écritures des lois physiques à différentes dimensionalités, en particulier dans l'examen des formalismes quadri- et tri-dimensionnels de la relativité (Ivezic : par exemple 2005). Dans la même veine, signalons les représentations de la mécanique à sept ou six dimensions proposées par Souriau (1970) ; nous voyons a priori un lien entre la représentation de cet auteur dans un espace de position x_i et vitesses v_i et la nôtre avec positions et temps (x_i, t_i) ; l'élimination d'un temps indépendant (septième dimension des espaces traités par Souriau) qui nous paraît inutile, se comprend si l'on rajoute la nécessité d'une vitesse « unité » (« quoiqu'il arrive ») pour construire le cadre de représentation (Guy, 2011).

Deuxième partie : Applications et pistes de recherche

Poursuivons ce travail par la revue de quelques domaines relevant de l'approche générale exposée dans la première partie. Comme on va le voir, les calculs ne sont pas toujours aboutis au point de faire le lien formel exact avec les développements précédents. Dans l'état actuel des choses, nous présentons des pistes de travail dont la validité pourra être mise à l'épreuve dans le futur.

5. La mécanique classique

Reprenons les deux lois (sous la forme des équations (38) et (41)) relatives à la paire (E, p) que nous considérons maintenant explicitement comme la paire (énergie, quantité de mouvement) de la mécanique classique. Essayons de voir si nous pouvons y ajuster les expressions de p et de E en fonction de la masse, de la vitesse et de la position, à savoir p = mv pour la quantité de mouvement et, E = ½ mv^2 ou E = K/r pour l'énergie, en prenant une énergie cinétique ou une énergie potentielle (d'origine gravitationnelle ou électrostatique par exemple). Tsabary et Censor (2005) ont fait cette étude pour la loi

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = gr\vec{a}dE \qquad (41)$$

Ils montrent, dans le cas d'une seule variable d'espace r (cas purement radial), qu'il y a accord avec les expressions de la quantité de mouvement et l'une ou l'autre forme de l'énergie. Ce résultat est obtenu sous réserve de la conservation de l'énergie totale, c'est-à-dire en somme l'équivalence entre les deux expressions de l'énergie. Au passage ils démontrent une loi vérifiée par la vitesse :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \qquad (46)$$

Nous ne reprendrons pas ici les calculs de façon détaillée dans le cas général de trois dimensions d'espace. Dans ce cas, les relations précédentes pour accorder la quantité de mouvement et l'énergie cinétique s'écrivent :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \qquad (47)$$

Nous pouvons maintenant nous poser aussi la question de la validation de la loi

$$\frac{\partial E}{\partial t} = Div\vec{p} \qquad (38)$$

En y insérant les expressions de p et E de la mécanique (Tsabary et Censor op.cit. ne se posent pas la question pour cette seconde loi, alors même qu'ils ont au départ de leur travail posé les principes en dualité qui conduisent à elle). Celle-ci correspond à un échange entre les variables spatiales et temporelles, c'est à dire aussi à l'échange v $\rightarrow$ 1/v. Cela revient en somme à changer la compréhension d'une vitesse (et dire par exemple qu'elle n'est plus mesurée en mètres par seconde mais en seconde par mètre). On a alors de façon duale besoin de relations du type :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \qquad (48)$$

Dans ces conditions, on pourra s'assurer que la seconde loi est effectivement vérifiée. Les développements précédents demandent un travail supplémentaire utile pour bien saisir la signification du changement de point de vue dans l'échange entre variables spatiales et temporelles, et dans l'échange corrélatif v $\rightarrow$ 1/v. Le fait de pouvoir associer les deux lois comme deux faces du même principe, alors que, pour l'énergie, on pense dans la première loi à l'énergie potentielle de gravitation (seconde loi de Newton) et, dans la seconde, à l'énergie cinétique dont on fait le bilan sous l'effet de la divergence de la quantité de mouvement, relie de façon profonde les deux formes d'énergie ; c'est aussi une autre façon d'approcher l'équivalence entre la masse inerte (dans la seconde loi) et la masse pesante (dans la première).

Dans le cas général relativiste, les calculs précédents doivent être refaits en rajoutant le facteur γ

$$\gamma = \left((1 - v^2 / c^2\right)^{-1/2}$$

et en associant p = $m_0 v\gamma$ et E = $m_0\gamma$ (c'est-à-dire $m_0 c^2\gamma$ si c = 1) comme les deux grandeurs en dualité. Ce sont les bonnes grandeurs en dualité dans le cas général en mécanique, les paires discutées à l'instant sans le facteur γ correspondant à l'approximation $c \to \infty$; cet ajustement est en accord avec les transformations de Lorentz pour deux grandeurs en dualité (f, g), comme nous l'avons calculé plus haut, à modifier ici en transformations concernant le module du premier vecteur et l'ensemble des coordonnées du second. E se développe en $m_0c^2 + ½\, m_0v^2 + \ldots$ et l'on fait apparaître l'énergie au repos m_0c^2.

Remarque sur l'utilisation des dérivées de transport

Nous avons vu plus haut l'intervention dans les calculs de la relation (47) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

On peut interpréter cette relation comme la nullité de la dérivée de transport de la vitesse le long du mouvement à la même vitesse ; on peut s'attendre que cette équation soit valable pour d'autres paramètres du système. C'est aussi une façon de dire que, dans notre compréhension d'un temps délocalisé ou d'un espace dé-« synchronisé », les dérivées ont un sens le long du mouvement ; autre façon de dire qu'à tout intervalle d'espace est associé un intervalle de temps, et réciproquement. Dans cet ordre d'idée, lorsque nous disons que les unités d'espace et de temps sont définies par le mouvement des photons, nous pouvons aussi écrire en correspondance une équation du type:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

identiquement vérifiée pour le flux J = cn, avec x = ct (par définition), où c est la vitesse (prise constante) de la lumière, n un nombre de photons par unité de volume ; c'est une équation de conservation des photons comprise également comme une dérivée de transport :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + c\frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

Lorsque nous faisons l'échange simultané x $\rightarrow$ t et v $\rightarrow$ 1/v, ces équations sont également conservées. On peut aussi voir de façon plus générale, dans les lois de degré zéro de type (1) ou (2), de telles dérivées de transport, sous réserve d'établir une correspondance entre les définitions des grandeurs (f, g) et des variables (x_i, t_i), c'est-à-dire sous réserve d'appuyer les définitions des unités d'espace et de temps sur les champs physiques f et g. La concordance entre elles des deux équations en dualité pour de mêmes unités d'espace et de temps, donc une même vitesse v dans la dérivée de transport, exige une relation de compatibilité que nous écrirons ici sans souci de rigueur df/dg = v, ce qui est bien le cas en mécanique pour une dimension d'espace où

$$\frac{dE}{dp} = \frac{d(1/2mv^2)}{d(mv)} = v$$

(calculs à reprendre dans le cas général).

Un deuxième sens du mot conservation

Ces développements nous conduisent à une deuxième signification du mot conservation, lorsque nous l'appliquons à l'énergie. En effet, lorsque, de façon indépendante de ce qui précède, nous écrivons deux lois différentes

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = Div\vec{p} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = gr\vec{a}dE_2$$

nous utilisons a priori deux grandeurs différentes E_1 et E_2 (E_1 énergie non définie pour l'instant ; E_2 fonction de force dans la loi de Newton). Alors, si nous voulons respecter la cohérence exposée ci-avant et comprenant les deux lois dans un même cadre, nous sommes amenés à écrire $E_1 = E_2$. (ou, suivant les conventions de signes : $E_1 + E_2 = cte$). C'est là une autre façon de parler de conservation d'énergie : non pas avec deux grandeurs et deux variables, mais par l'égalisation de deux « formes » de l'énergie. Plus précisément lorsque l'on égale le travail des forces de pesanteur mgh (forces dérivant de E_2 par gradE_2) et l'énergie cinétique (dans $\partial E_1/\partial t$), il n'y a plus de bilan, il n'y a plus de dérivées partielles, mais une correspondance entre deux formes ou deux fonctions de l'énergie. Cet usage du mot conservation est propre à la mécanique et à l'énergie (dans la dualité énergie cinétique / énergie potentielle), et n'a pas d'équivalent pour d'autres grandeurs.

L'énergie

C'est l'occasion de souligner que (non plus que le temps sans l'espace) l'énergie n'a pas de sens toute seule, mais seulement dans la paire qui l'associe à la quantité de mouvement ; et seulement encore à l'occasion de variations des grandeurs en jeu, ou ce que nous pourrions appeler « transformations ». Dans le cadre où nous avons raisonné, l'énergie ne peut être séparée de sa capacité à mettre une masse en mouvement, ou à arrêter un mouvement, conformément à ses premières définitions historiques. On pourra dire ici que l'expression $E = m_0c^2$ ne peut être séparée du reste du formalisme qui la relie en particulier à $p = m_0v\gamma$. L'énergie, scalaire, a un lien privilégié avec le temps, par le fait que ce paramètre est aussi un scalaire. Ce qui est nouveau ici, c'est que ce paramètre est à construire à partir des trois composantes t_i de la variable temporelle, et que, dans une démarche inverse, nous pouvons affecter des composantes vectorielles à l'énergie. Nous devons pour cela connaître la direction selon laquelle nous définissons le temps. Rappelons que, dans le texte fondateur d'Einstein lui-même (1905), on distingue une énergie transversale et une énergie longitudinale (masse transversale / longitudinale). Il pourra être intéressant d'examiner comment cela se relie à notre approche.

6. Les équations de Maxwell

Le premier exemple donné ci-dessus de grandeurs en dualité était la paire (champ électrostatique, champ magnétique). Nous l'écrirons (E, B) sans souci de précision sémantique comme il est souvent d'usage en physique fondamentale (il faudrait en toute rigueur parler de champ électrique et d'*induction* magnétique ; et discuter du quadruplet E, D, B, H… où l'on associe champs et inductions ; cela est en particulier utile pour écrire l'électromagnétisme « dans la matière », avec des courants et des charges au sein du milieu étudié ; cela correspond aussi à deux échelles de représentation emboîtées). Les quatre équations de Maxwell écrites dans le vide et dans le cas de la nullité des charges et des courants (ρ = j = 0 ; ρ densité de charge, j densité de courant) sont :

$$Rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad Rot\vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad div\vec{E} = 0 \qquad div\vec{B} = 0 \tag{49}$$

Tsabary et Censor (2005) ont retrouvé les deux premières équations à partir d'un principe analogue à notre équation (3), c'est-à-dire une conséquence de notre équation (1) plus générale. Les deux dernières équations de Maxwell sont connues comme conséquences des deux premières (Mathieu et al., 1985). Nous pouvons donc à notre tour, sur la base de ces différents travaux, conclure que le principe posé en (1), appliqué à la paire (E, B) met sur la voie des équations de Maxwell. Toutefois, nous ne redonnerons pas toutes les étapes de la démonstration de Tsabary et Censor qui mérite de nombreux calculs et utilise des transformations algébriques intermédiaires. Celles-ci reviennent à utiliser des variables auxiliaires que nous désignerons par G et K, combinaisons linéaires des champs E et B. Les lois de degré zéro s'écrivent directement pour G et K sous la forme :

$$\frac{\partial G_i}{\partial t_i} = \frac{\partial K_i}{\partial x_i} \tag{50}$$

et par échange des variables spatiales et temporelles :

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_i} = \frac{\partial K_i}{\partial t_i} \tag{51}$$

Et par sommation, nous avons :

$$\sum_i \left(\frac{\partial G_i}{\partial t_i} - \frac{\partial K_i}{\partial x_i}\right) = \sum_i \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_i} - \frac{\partial K_i}{\partial t_i}\right) = 0 \tag{52}$$

Les formulations en rotationnels portant sur E et B s'en déduisent par l'effet des transformations linéaires dont nous avons parlé à l'instant. Les deux dernières équations de Maxwell ne contiennent chacune qu'une seule des deux grandeurs en dualité, dans la nullité des divergences de E et B respectivement. Notre interprétation (à discuter) est qu'elles correspondent alors à des relations du type

$$\frac{\partial|\vec{E}|}{\partial t}=Div\vec{B} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial|\vec{B}|}{\partial t}=Div\vec{E} \tag{53}$$

Egales à zéro dans le cas restrictif où nous nous situons (vide, absence de courants et de charges) ; dans ce cas en effet, les solutions sont des ondes planes sinusoïdales vérifiant

$$|\vec{E}| = cte \qquad \text{et} \qquad |\vec{B}| = cte \tag{54}$$

Ce qui entraîne la nullité des divergences.

De nombreux auteurs ont proposé des écritures des équations de Maxwell dans des formalismes de dimensions variées (3, 4, ou 6) avec possiblement trois dimensions de temps, sans donner pour ce dernier cas l'interprétation que nous proposons. Citons sans souci d'exhaustivité : Majorana (voir par exemple Esposito, 1998), Teli (1984), Ivezic (2005), Franco (2006). Ivezic (2005) montre la non-équivalence entre les formulations classiques à 3 et 4 dimensions pour ce qui concerne l'invariance de Lorentz. Ce constat, ajouté à tant d'autres remarques (y compris celles que l'on peut faire à propos des correspondances entre notre approche et celle de Tsabary et Censor) nous montre que ce domaine des équations de Maxwell n'est pas clos !

Avant de quitter l'électromagnétisme, signalons que les relations dites de jauge reliant le potentiel scalaire électrostatique V et le potentiel vecteur électromagnétique A ont à nouveau une forme semblable aux formes de degré zéro qui nous intéressent ici :

$$\frac{\partial V}{\partial t} - divA = 0 \tag{55}$$

(jauge de Lorentz). On peut s'attendre en effet que les formulations de base données à un certain ordre de dérivation (et concernant les champs E et B) soient en correspondance avec d'autres formulations à des degrés de dérivations différents, en l'occurrence ici à un niveau intégré (voir aussi les sections suivantes). On peut imaginer reprendre la définition des potentiels V et A de façon générale dans le formalisme comprenant trois paramètres liés au temps.

7. Les équations de la gravitation

Dans la démarche classique, on ne se pose pas de façon directe la question de l'invariance de Lorentz des équations de la gravitation. La raison en est que, d'une part, la relativité restreinte suppose l'absence de gravitation, et que d'autre part la relativité générale incorpore dans les coefficients de la métrique d'espace-temps les équations de la gravitation qui n'ont en somme pas besoin de formulation indépendante. Si l'on prend l'option que l'on peut découpler la gravitation de la définition des paramètres d'espace et de temps (nous avons évoqué ce point à la fin de la section 3), alors la question de l'invariance de Lorentz des équations de la gravitation se pose. Nous avons dans Guy (2010b) mené une discussion préliminaire sur cette question. On peut tout de suite observer qu'il n'y a dans la théorie classique qu'un seul champ induit par les masses statiques, c'est le champ bien connu de gravitation. Par contre, il n'y a rien pour les masses en mouvement. C'est-à-dire rien, pour « équilibrer » le premier champ, dans la dualité de deux grandeurs associées, comme nous le recherchons dans le présent travail. En se basant sur l'analogie entre les écritures des champs de pesanteur et électrique, nous pouvons postuler, en association au champ g

$$\vec{g} = -\frac{GM}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \tag{56}$$

un deuxième champ gravifique h, analogue au champ magnétique qui s'écrit :

$$\vec{h} = A\frac{GM}{|\vec{r}|^3}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{r}\right) \tag{57}$$

Il s'agit du champ créé par une masse source M, localisée à l'origine des coordonnées, sur une masse unité située à r (x, y, z) (problème à deux corps), et mobile à la vitesse v = dr/dt; $\times$ est le produit vectoriel, G est la constante de gravitation, A une constante additionnelle que nous prenons provisoirement égale à 5.10^{-11} u.S.I. ($m^{-2}s^{2}$) sans indication de marge d'erreur. La loi modifiée de la gravitation newtonienne qui tient compte des vitesses relatives des masses en mouvement s'en déduit. Dans le cas du problème à deux corps, l'accélération est donnée par

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{|\vec{r}|^3}[\vec{r} - A\frac{d\vec{r}}{dt}\times(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{r})] \qquad (58)$$

où $\vec{r}$ est le rayon vecteur reliant la masse source, de valeur M, à la masse d'épreuve. On trouve dans la littérature de nombreuses tentatives de type comparable d'écrire des lois de la gravitation modifiées en utilisant des analogies avec l'électromagnétisme (voir quelques références dans Guy, 2010b). Dans le travail cité, nous l'avons appliquée à différents problèmes d'aujourd'hui mettant en jeu la gravitation. On vérifie facilement que la loi simule un « supplément » de masse et permet de discuter des situations où de tels excès de masse sont rencontrés : ainsi les calculs fournissent de bons ordres de grandeur pour les excès de masse ou de gravitation apparents associés au mouvement des étoiles dans les galaxies ou des galaxies dans les amas de galaxies, et ce pour la même valeur du paramètre additionnel. La loi donne de façon équivalente l'impression d'un défaut d'attraction pour les stades ultérieurs par rapport aux stades précoces d'un système de masses en éloignement relatif (expansion) les unes par rapport aux autres, ce que l'on peut qualifier de façon relative comme une force répulsive. L'ordre de grandeur prévu de l'énergie correspondante est aussi conforme à ce qui est indiqué dans la littérature à propos de l'« accélération » de l'expansion de l'univers. L'étude est préliminaire et se contente d'établir des ordres de grandeurs des effets attendus par une démarche approchée pour le problème à deux corps. Il sera intéressant d'effectuer des simulations numériques quantitatives et d'examiner si la loi proposée résiste ou non à davantage de confrontation aux données d'observation. Elle permettrait d'éviter le recours aux concepts de matière noire et d'énergie sombre. Dans Guy 2010b, nous avons aussi envisagé d'appliquer la loi complète à l'étude des anomalies du mouvement des satellites Pioneer, mais il semble que cette question a reçu depuis une solution.

Nous pouvons remarquer que, telle qu'elle est construite, cette loi de la gravitation est compatible avec la relativité restreinte c'est-à-dire va vérifier des équations comparables aux équations de Maxwell pour les champs g et h, ou encore, par l'effet de combinaisons linéaires k(g,h) et l(g,h) (respectant les dérivations mathématiques lues dans Tsabary et Censor) des équations de degré zéro du type:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t_j} = \frac{\partial l_j}{\partial x_i} \qquad (59)$$

Par transitivité, on peut s’attendre à une compatibilité avec la relativité générale, sous réserve de reprendre cette théorie dans le cadre proposé, avec une variable temporelle ayant momentanément trois composantes. Cela permet une meilleure symétrie entre les variables. Il conviendra d’examiner de près la proximité de notre approche avec la théorie de la relativité générale (est-ce une formulation équivalente à comprendre dans un pluralisme théorique ? cf Poincaré, 1905 ; Mizony, 2010 ; mais les deux théories donnent des prévisions différentes sur certains problèmes de gravitation comme on l’a dit plus haut). Le comportement a priori semblable à celui de la relativité générale se comprend en remarquant que, dans le cas où la définition des standards d’espace et de temps s’appuie sur les champs de la gravitation, si l’on change dans (59) les valeurs des champs à cause d’une distribution de masses différente, on peut changer les valeurs de x et t pour que « rien ne change »). Il est possible que le point de vue proposé permette de discuter certains problèmes se posant dans l’étude des trous noirs et où se manifeste un découplage apparent entre la géométrie basée sur la propagation de la lumière (captée par le trou noir) d’une part, et la propagation du champ de gravité (qui semble, de façon paradoxale, traverser la frontière du trou noir et se manifester à l’extérieur) d’autre part. Dans le cas où l’on utilise une dualité de variables (r, t) avec une seule dimension d’espace radiale, on parle d’échange entre les variables spatiales et temporelles en traversant la frontière du trou noir. Si temps et espace sont associés à des marqueurs positionnés dans le même espace tri-dimensionnel, il y a une latitude du choix de ce que l’on appelle temps ou espace, du fait de la parfaite symétrie de comportement des deux types de variables manifestée dans les relations (10) données plus haut. On peut s’appuyer sur le signe des coefficients de la métrique pour décider du vocabulaire (temps ou espace) ; on comprendra dans ce contexte pourquoi un changement de signe conduit à l’expression un peu mystérieuse d’échange entre espace et temps dans la traversée d’un trou noir !

8. Du côté de la thermodynamique

Nous ne regarderons pas en détail ce qui se passe du côté de la thermodynamique. Il nous semble qu'on peut y observer des liens avec les considérations précédentes, à un double niveau (voir par exemple Glansdorff et Prigogine, 1971) :

- celui des nombreuses relations de conservation que l'on y trouve, et où est exprimée de façon générale l'égalité de la dérivée par rapport au temps d'une grandeur (une concentration d'un composé par exemple) à la divergence du « flux » associé de cette grandeur ; et :
- celui des relations vectorielles où l'on exprime qu'un flux d'une grandeur (exprimé dans un sens très large) est proportionnel à une force, elle-même très souvent sous la forme d'un gradient de la grandeur conjuguée.

Dans la mesure où nous retrouvons dans ces deux types de relations, d'une part les mêmes grandeurs, et d'autre part des correspondances entre dérivées temporelles et dérivées spatiales des grandeurs, nous sommes encouragés à y regarder de plus près. Mais du travail reste à faire pour exprimer toutes les grandeurs manipulées en thermodynamique dans un formalisme directement comparable à celui utilisé dans notre approche. On constatera que, en associant une concentration c et un flux J de matière par exemple on a bien

$$\frac{\partial c}{\partial t} = DivJ \tag{60}$$

Mais on s'attend à avoir aussi

$$\frac{\partial J}{\partial t} = gradc \tag{61}$$

Alors que l'on pose au contraire en thermodynamique

$$J = Dgradc \tag{62}$$

Dans un cas on égale donc le gradient de c à la dérivée de J par rapport à t, et dans l'autre on égale le gradient de c à J, mais à un facteur près. On peut alors se demander si l'introduction du coefficient D ne fait pas une moyennisation en temps permettant de passer de la dérivée de

J par rapport à t à la fonction J elle-même (cela serait en accord avec la détermination de D en physique statistique où apparaissent des temps caractéristiques divisés par des longueurs au carré, en relation avec les surfaces auxquelles sont rapportés les flux). Il peut en effet sembler paradoxal que l'action de la force (le gradient de concentration) ne s'accompagne d'aucune accélération comme dans la loi de Newton (on parle uniquement de vitesse pour les flux dans l'écriture J = vc). Il faudra examiner cette question, en y associant peut-être les développements proposés par les théories de l'Extended irreversible thermodynamics (Jou et al., 2001) où les lois de la diffusion comme écrites ci-dessus reçoivent des formulations de type hyperbolique (évitant l'inconvénient d'une écriture parabolique avec des vitesses infinies de propagation) et en y associant les considérations énoncées plus haut sur l'utilisation des dérivées de transport. La relation entre courant et charge en électromagnétisme se pose dans les mêmes conditions. Tsabary et Censor ont montré que les équations du type

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = Div\vec{j} \tag{63}$$

dérivent bien de relations du type $\frac{\partial \rho_i}{\partial t_i} = \frac{\partial j_i}{\partial x_i}$. Pour équilibrer le point de vue, nous pouvons écrire d'autres relations du type :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x_i} = \frac{\partial j_i}{\partial t_i} \tag{64}$$

à mettre en relation avec le reste du formalisme. On notera dans la même ligne que, pour dériver les relations générales de symétrie entre coefficients thermodynamiques, les auteurs ont trouvé la nécessité d'écrire les flux thermodynamiques sous la forme de dérivées temporelles de certaines grandeurs (De Groot et Mazur, 1963 ; Onsager, 1931).

Les relations temps espace en thermodynamique doivent aussi faire intervenir les changements que suppose le passage de l'échelle microscopique de la mécanique à l'échelle macroscopique des grandeurs nouvelles de la thermodynamique. Dans notre approche où, à aucune échelle, nulle variation dans le temps n'est séparée d'une variation dans l'espace, on peut chercher à comprendre comment l'on définit des phénomènes « purs » où une seule variable (de temps ou d'espace) intervient. On pense par exemple à la séparation entre des phénomènes de réaction chimique purement temporels d'un côté, et des phénomènes de transport par diffusion, qui concernent les variables spatiales de l'autre (cela se manifeste dans l'écriture de la production d'entropie). Les deux phénomènes sont en réalité reliés par les approches pragmatiques : les auteurs se permettent souvent de faire des calculs appliqués à la cinétique chimique ponctuelle en se donnant des diffusions des constituants à petite échelle à travers une couche limite (réciproquement, ils homogénéisent en une transformation purement scalaire des changements locaux qui opèrent par diffusion dans un milieu dispersé). La séparation entre les deux phénomènes (cinétique / diffusion) se comprend alors par changement d'échelle et homogénéisation, mais leur association étroite perdure au niveau fondamental. Les différents termes apparaissent séparés dans la production d'entropie qui joue l'analogue d'une fonction potentiel à optimiser (voir plus loin la section sur les principes variationnels ; voir aussi Guy, 1987). Tout cela doit être repris avec l'aide du formalisme à trois dimensions pour le temps.

En restant dans la thermodynamique, on notera avec intérêt que les mathématiciens étudiant les problèmes hyperboliques utilisant une fonction entropie (voir par exemple in : Bonnet-BenDhia et al. 2011) définissent cette dernière, non par une seule fonction scalaire S, mais par un couple (S, F) où F est un flux d'entropie ; S et F vérifient (à une dimension d'espace et une de temps) la relation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad (66)$$

Avec une condition additionnelle qui s'écrit : F' = S'f' où les dérivées F' et S' s'entendent par rapport à la variable d'état u, elle-même sujette à une équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

Où l'on voit la fonction f intervenant par sa dérivée dans la relation écrite à l'instant. On vérifiera que la condition F' = S'f' exprime que les deux équations ci-dessus (l'une portant sur S, l'autre sur u) se comprennent chacune comme une dérivée de transport avec la même vitesse v = f'(u) = F'/S'. On peut y voir l'expression d'une compatibilité par rapport au choix des unités d'espace et de temps dans les deux équations. Le second principe s'exprime par une inégalité portant sur l'équation précédente.

9. Le principe ergodique

Le principe ergodique renvoie à la théorie des probabilités et à la physique statistique, et a de nombreuses formulations. Disons ici que, pour une variable aléatoire susceptible de prendre différentes valeurs, la moyenne de la variable, calculée sur tous ses états possibles/observés à un instant donné, est égale à la moyenne de la variable calculée sur les valeurs prises dans le temps. C'est donc une façon de mettre en correspondance des informations spatiales (les différents états possibles à un instant, en faisant l'hypothèse que ces différents états se « lisent » dans une dimension spatiale) et des informations temporelles (les valeurs prises dans le temps). Dans cette mesure le principe ergodique rejoint le cadre que nous avons discuté. Si en effet nous intégrons une relation du type $\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial x}=0$ dans un domaine spatio-temporel [X $\times$ T] (X amplitude d'espace, T amplitude de temps) on a :

$$\iint_{X,T}\left(\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)dxdt=\int_X\left(\int_T\frac{\partial f}{\partial t}dt\right)dx-\int_T\left(\int_X\frac{\partial g}{\partial x}dx\right)dt=0 \qquad (67)$$

En intégrant sans rajouter de nouvelles fonctions (le résultat est valide à une fonction quelconque près de x pour f, et à une fonction quelconque de t près pour g), on a :

$$\int_X fdu=\int_T gdv \qquad (68)$$

Où nous avons changé les noms des variables d'intégration pour la généralité. On peut lire ces expressions comme des calculs d'espérances en probabilité, qui sont données par des intégrales. On peut ainsi considérer la première intégrale comme portant sur les valeurs des variables sur les états ou dans l'espace, et la seconde intégrale comme portant sur les valeurs de variables dans le temps (calcul fréquentiel). En probabilités, le calcul se fait en intégrant une expression où l'on multiplie la valeur de la variable par la densité de probabilité. Si nous réécrivons l'expression précédente comme

$$\int_X u \frac{f}{u} du = \int_T v \frac{g}{v} dv \tag{69}$$

Nous voyons que, formellement, la fonction f/x correspond à une densité de probabilité sur l'espace ou sur les états (on parle plus généralement à ce propos d'espace probabilisé et de « mesure » des événements), alors que g/x correspond à une densité de probabilité sur les valeurs prises dans le temps (aspect fréquentiel) ; nous ferons l'hypothèse que nous pouvons normer f et g de façon que les fonctions précédentes soient effectivement des densités. L'égalité précédente peut être vue comme égalant une moyenne en espace à une moyenne en temps, et le principe ergodique peut être vu comme une forme intégrée de la loi locale que nous avons proposée. Si nous pensons fondamental, que dans tout domaine de la science, les grandeurs n'apparaissent que sous deux visages reliés entre eux, l'un à valeur temporelle et l'autre à valeur spatiale, nous pouvons vouloir une telle exigence dans le domaine des probabilités. Compris de cette façon, le principe ergodique a ainsi un sens premier. Il semble permettre de réconcilier les deux approches classiques des probabilités : l'approche subjective ou logique (spatiale, ensembliste) d'une part, et l'approche fréquentielle (temporelle) d'autre part. De nombreux débats discutent de l'intérêt ou de la primauté d'une approche ou de l'autre. Nous serions tentés de dire qu'aucune des deux approches n'a raison sur l'autre : chacune exprime un point de vue tronqué sur la même réalité. Les replacer dans le cadre du principe ergodique fait apparaître ce qui était caché dans chacune des deux, une dimension temporelle pour l'une et une dimension spatiale pour l'autre. De même que nous voulons voir temps et espace dans toute relation (Guy, 2011), nous pouvons temporaliser et spatialiser les probabilités. Dans cette compréhension, les variables spatiales et temporelles doivent pouvoir s'échanger et permettre d'écrire de nouvelles lois. Plus généralement, dans les processus stochastiques, nous considérerons que les grandeurs f et g précédentes vont devenir fonctions des deux variables x et t, et non fonction d'une seule.

La définition des ensembles de Gibbs est une autre façon de parler du principe ergodique (la moyenne sur les ensembles est égale à la moyenne en temps). Ces ensembles reposent sur la définition d'une collection de systèmes identiques placés dans les mêmes conditions et représentent une sorte d'étalement des possibilités dans un espace, à rapprocher de l'espace « spatial » habituel (par opposition au temps). Dans l'approche « subjective » de la probabilité (non fréquentielle) on se pose la question de connaître la probabilité (dans le sens de la caractérisation du degré de confiance à accorder à notre connaissance dans l'instant présent) que tel événement ait lieu. Pour ce faire, on fabrique en réalité dans son esprit, comme pour les ensembles de Gibbs, des répliques du système envisagé et on fait des moyennes sur ces répliques. Le principe ergodique nous dit que nous ne pouvons séparer ces moyennes sur ces répliques au présent, des moyennes dans le temps.

Nous avons envisagé dans ce qui précède des intégrales dans des moyennes. On peut trouver des situations où ce sont les fréquences ou probabilités individuelles elles-mêmes dans l'espace et dans le temps qui sont égalées. Ainsi dans des problèmes de diffusion en métallurgie, les chercheurs font-ils souvent l'hypothèse que la probabilité de saut d'un atome d'un nœud à un autre d'un réseau cristallin, aussi bien dans l'espace (pour calculer une configuration optimale) que dans le temps (pour simuler un processus) sont égales et proportionnelles au gain énergétique du système (simulation Monte Carlo, Path probability method). Ces pratiques ne sont pas justifiées par l'appel à un principe particulier mais simplement fondées sur le caractère raisonnable des choix faits et sur leur efficacité. Nous pouvons quant à nous y voir un peu plus et une nouvelle manifestation de ces lois de degré zéro reliant variations dans le temps et dans l'espace. Dans la path probability method (Kikuchi, 1966), on fait aussi intervenir un *principe extrémal* dans le temps analogue à ceux qui interviennent dans l'espace (voir section 11).

10. La mécanique quantique

On sait que l'équation de Schrödinger n'est pas invariante de Lorentz ; l'équation de Dirac, par contre, l'est. Il est remarquable de constater que cette dernière s'exprime sous une forme que nous jugerons analogue aux expressions postulées au départ de ce texte, c'est-à-dire égalant des dérivées du premier ordre par rapport aux variables temporelle à des dérivées de même ordre par rapport aux variables spatiales ; les grandeurs en dualité sont la fonction d'onde d'une part et sa multiplication par les matrices de Pauli d'autre part. Dans le cadre du présent travail, l'analogie demanderait à être précisée en introduisant les variables temporelles intermédiaires t_i dans le formalisme quantique et en exploitant les symétries entre variables spatiales et temporelles. Que donne par exemple le principe de correspondance pour les opérateurs associés aux variables, par un échange entre variables spatiales et temporelles, maintenant possible avec l'intervention de trois paramètres temporels en face des trois paramètres spatiaux (on est tenté de définir un $\partial/\partial t_x$ à mettre en regard d'un p_{tx} etc.)? On peut voir dans l'équation de Dirac régissant la fonction d'onde, qui a un caractère probabiliste (avec l'action des dérivées spatiales et temporelles « portant » sur cette fonction d'onde) une sorte de principe ergodique sous forme dérivée (la dérivée d'une fonction de probabilité par rapport au temps est reliée à la dérivée d'une autre fonction de probabilité par rapport à l'espace).

Les relations d'incertitude se posent ici et relient à nouveau des variations associées à l'espace (dans le δx) et des variations associées au temps (dans le δp_x) ; il y a trois relations, une pour chaque coordonnée. Dans Guy (2004), nous avons écrit des relations mettant en jeu directement les variables d'espace et de temps (maintenant égales à trois), exprimées sous la forme $\delta x \delta t \geq A(v)$ (où A est une fonction de la vitesse v) ; on trouve dans Burderi et Di Salvo (2012) des relations du même type, où c (vitesse de la lumière) intervient au dénominateur de A(v) avec le même exposant que dans Guy, 2004. Dans l'esprit de notre travail où les champs en dualité (f, g) peuvent être mis sur le même plan que les variables (x_i, t_i) nous pouvons attendre des relations d'incertitude du type $\delta f \delta g \geq B(v)$ pour les modules des champs en dualité, ce qui est une autre façon détournée de lier temps et espace.

11. Principe de moindre action, propriétés de symétrie, relations de conservation

Les diverses lois discutées plus haut (celles de la mécanique, de la relativité -restreinte et générale-, de la mécanique quantique, de l'électromagnétisme), s'accordent toutes à un principe variationnel. Les lagrangiens qui interviennent ne sont pas déterminés de façon unique, mais on remarquera que l'usage est de prendre pour eux la même forme dans les divers cas étudiés (c'est-à-dire une différence de carrés des normes des grandeurs en dualité, comme dans : $E^2 - B^2$, ou $\Sigma x^2 - c^2t^2$ etc.) ce qui montre l'unité profonde de structure de ces domaines. Sur cette base, nous sommes confortés à postuler que les lois de type (1) proposées au début du texte dérivent aussi d'un principe variationnel. Cela ouvre de nouvelles voies de compréhension et de développement. Ici encore nous ne donnons que quelques pistes de travail : - écrire les lagrangiens adaptés à chaque situation, - étudier le rôle des symétries entre variables spatiales et temporelles (les variables t_i et x_i sont désormais à mettre sur le même plan, tant dans l'écriture de nouvelles lois que dans les choix des espaces et des bornes d'intégration) ; - revoir les théorèmes de Noether et les relations entre expressions en divergences, lois de conservation et groupes de symétrie (cf Kosmann-Schwarzbach, 2006) ; - reprendre la discussion du groupe de Poincaré à six dimensions (avec la restriction que le vecteur t soit parallèle à v ; Guy, 2010a) ; - examiner les formulations hamiltoniennes équivalentes…

Dans le cadre de la présente compréhension du lien entre les concepts d'espace et de temps, et les phénomènes, le principe de moindre action apparaît moins mystérieux et téléologique qu'on peut le juger à première vue. Ce principe étonne en effet si l'on pense que préexistent un espace et un temps dans lesquels les phénomènes s'inscriraient, et se comporteraient comme s'ils « cherchaient » à minimiser des distances, des temps, des dépenses…, c'est-à-dire comme s'ils connaissaient à l'avance un terme, un but. Ce paradoxe s'évanouit si l'on veut bien voir que le temps et l'espace sont définis par les phénomènes. Une distance ou un temps entre deux points, c'est déjà une moindre action par rapport aux phénomènes étudiés, qui permettent eux-mêmes de définir temps et espace ; cette distance ou ce temps, c'est donc déjà une moindre distance ou un moindre temps ; les différents choix de Lagrangiens expriment l'équivalence entre des moindres actions, des moindres temps, des moindres distances, des moindres « dépenses » des fonctions f et/ou g en dualité. La définition même des paramètres d'espace et de temps via les lois (1) est là. On relie dans le même énoncé une compréhension globale (à travers la formulation intégrale) à une compréhension locale (dans les dérivées variationnelles).

12. Formulations dérivées à des ordres supérieurs à un

Au début de ce texte, nous avons postulé des lois physiques de degré zéro sous la forme d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Nous avons par la suite proposé, à l'occasion de la discussion du principe ergodique, des formulations intégrales. Nous pouvons aussi proposer, par dérivation de nos premières relations, des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à un, reliant les grandeurs physiques en dualité, ou portant sur les unes ou les autres. Ainsi, en se restreignant à une dimension d'espace et une de temps, chacune des deux équations :

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial x}=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial t}=0$$

peut-elle être dérivée à nouveau par rapport à x ou par rapport à t. En dérivant par exemple la première par rapport à t et la seconde par rapport à x, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t}=0 \qquad (70)$$

Si l'on suppose que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}=\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} \qquad (71)$$

il vient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0 \qquad (72)$$

Cette dernière relation peut être comprise comme une équation de propagation pour la grandeur *f*, dont la solution générale est une combinaison de deux fonctions f_1(x – t) et f_2(x + t), correspondant chacune à une propagation à vitesse 1 dans le sens positif ou négatif de l'axe des x. Pour la grandeur *g* on pourrait obtenir une équation analogue. C'est par une démarche semblable que l'on dérive des équations de propagation des ondes électromagnétiques à partir des équations de Maxwell. Nous ne discuterons pas davantage ces points ; nous avons là l'amorce d'une piste de recherche consistant à examiner les formulations dérivées de nos équations initiales, en particulier en écrivant les relations au second ordre avec trois variables temporelles t_i, et en étudiant les symétries entre variables temporelles et spatiales sur ces diverses formulations. On peut se poser à cet endroit la question de la compatibilité entre les expressions au second ordre et celles proposées au premier ordre. On sait (voir par exemple Zerner, 2008) que l'on peut transformer l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^{\,2}}=0 \qquad (73)$$

En faisant les changements de variables $u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}$ et $u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$

On a alors

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \sum \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \tag{74}$$

Expressions qui se rapprochent de celles que nous avons présentées au début du texte, en mettant t sur le même plan qu'une variable d'espace.

Conclusion

Dans le texte qui précède, nous avons proposé un cadre général devant permettre de nouvelles discussions sur les formes élémentaires des lois physiques. Il contraint leurs phénoménologies et les diverses symétries auxquelles elles doivent se conformer, mais il ne dit rien sur les entités physiques en jeu dans les grandeurs manipulées ni les médiations qui les relient (nature des particules et des bosons d'interaction par exemple). L'avenir dira quelles pistes parmi celles présentées résistent et méritent d'être développées. Dans l'esprit de notre approche, nous sommes encouragés à définir les grandeurs et les lois en dualités, et plus précisément faire dans les lois physiques des essais systématiques d'échanges entre variables spatiales et temporelles (maintenant associées à trois paramètres ; on peut penser que, en toute rigueur, ce genre d'échange fonctionne d'abord pour les équations qui sont invariantes de Lorentz). Comme nous l'avons montré dans la section sur la mécanique quantique ou sur le principe ergodique, ce qui est véritablement en jeu, plus généralement que l'égalisation de dérivées partielles de grandeurs en dualité, est la définition des grandeurs par paires, dans la correspondance entre « quelque chose » concernant le temps et « quelque chose » concernant l'espace. Cela renvoie à la co-construction des concepts de temps et d'espace et tout ce qui est associé à chacun d'eux, et permet de comprendre inversement que le lieu des questions contemporaines sur l'absence de temps (non-temporalité en mécanique quantique) coïncide avec le lieu des questions sur l'absence d'espace (non localité). Le substratum à partir duquel se fait ces constructions reste voilé.

Références

Basdevant J.L. (2002) Principes variationnels et dynamique, Cours de l'Ecole polytechnique, 102 p.

Bitbol M. (2010) De l'intérieur du monde. Pour une philosophie et une science des relations, Paris : Flammarion, 720 p.

Bonnet-BenDhia A.-S., Fliss S., Joly P. et Moireau P. (2011) Introduction aux équations aux dérivées partielles et à leur approximation numérique, cours de l'Ecole nationale supérieure des techniques avancées, 128 p.

Burderi L. and Di Salvo T. (2012) The quantum clock: a critical discussion on space-time, arXiv:1207.0207v1 [gr-qc] 1 Jul 2012

deGroot S.R. et Mazur P. (1963) Non-equilibrium thermodynamics, North Holland publishing company, 510 p.

Dujardin Ph. et Guy B. (2012) Vers une pensée de la relation, échanges entre un politologue et un physicien, Actes des deuxièmes ateliers sur la contradiction, coordination B. Guy, Presses des mines, Paris, 77-87.

Einstein A. (1905) Sur l'électrodynamique des corps en mouvement, Annalen der Physik, XVII, 891-921.

Elbaz C. (1984) L'onde stationnaire et la transformation de Lorentz, C.R. Acad. Sc. Paris, 298, II, 13, 543-546.

Esposito S. (1998) Covariant Majorana formulation of electrodynamics, Foundations of physics, 28, 2, 231-244.

Franco J.A. (2006) Vectorial Lorentz transformations, Electronic Journal of Theoretical Physics, 9, 35-64.

Glansdorff P. et Prigogine I. (1971) Structure, stabilité et fluctuations, Masson, Paris, 288 p.

Guy B. (1987) Trajets d'évolution dans les diagrammes de phases: un principe de moindre distance basé sur la métrique Lij, 13° Journées sur les Equilibres entre Phases, Lyon, Avril 1987, J.J. Counioux et M.T. Saugier-Cohen-Adad éditeurs, Université de Lyon I, 49-54.

Guy B. (2004) L'éclair et le tonnerre, promenades entre l'espace et le temps (à propos de la théorie de la relativité), Editions EPU, Paris, 224 p.

Guy B. (2010a) Les relations de Lorentz et le temps : proposition d'utilisation d'un paramètre tri-dimensionnel défini par un déplacement. La question du temps en physique. http://archive.org/details/LesRelationsDeLorentzEtLeTempspropositionDutilisationDun

Guy B. (2010b) A modified law of gravitation taking account of the relative speeds of the moving masses. A preliminary study, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00472210/fr

Guy (2011) Penser ensemble le temps et l'espace, Philosophia Scientiae, 15, 3, 91-113.

Ivezic T. (2005) The difference between the standard and the Lorentz transformations of the electric and magnetic fields. Application to motional EMF, Foundations of Physics Letters, 18, 4, 301-324.

Jou D., Casas-Vazquez et Lebon G. (2001). Extended irreversible thermodynamics, Springer, 462 p.

Kikuchi R. (1966) The path probability method, Supplement of the progress of theoretical physics, 35, 64 p.

Kosmann-Schwarzbach Y. (2006) Les théorèmes de Noether ; invariance et lois de conservation au XX° siècle, Les éditions de l'Ecole polytechnique, 202 p.

Mathieu J.P., Kastler A. et Fleury P. (1985) Dictionnaire de physique, Masson, Eyrolles, 568 p.

Mizony Michel (2010) Sur le pluralisme théorique : de Kant à Poincaré ; ou comment gérer les paradoxes en sciences, Ateliers sur la contradiction [Guy 2010], Paris : Presses des mines.

Onsager L. (1931) Reciprocal relations in irreversible processes, 1. Physical Review, 37, 405-426.

Poincaré H. (1905) La valeur de la science, Paris : Flammarion, 1990

Rougé A. (2002) Introduction à la relativité, Les éditions de l'Ecole polytechnique, 180 p.

Rovelli C. (2004) Quantum gravity, Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge university press, 458 p.

Rovelli C. (2006) The disappearance of Space and Time, in Philosophy and Foundations of Physics. The Ontology of Spacetime D. Dieks (Editor) Elsevier B.V.

Souriau J.M. (1970) Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris, 416 p.

Teli M.T. (1984) Pappas transformations through the invariance of electromagnetic field equations, Lettere al nuovo cimento, 39, 4, 55-59.

Tsabary & Censor (2005) An alternative mathematical model for special relativity, Nuovo Cimento B, 120, 2, 179-196.

Zerner M. (2008) Equations aux derivées partielles, in: Encyclopaedia Universalis, tome 7, 521-526.

Ziino G. (1979a) On the theoretical reliability of a three-temporal Lorentz transformation, Lett. Nuovo Cimento, 24, 6, 171-174.

Ziino G. (1979b) On the possibility of a three-temporal Lorentz transformation, Phys. Lett., 70A, 2, 87-88.

Annexe 1

Transformation de Lorentz vectorielle (rappels de Guy, 2010a)

Nous avons dans (Guy, 2010a) analysé ce que nous avons ressenti comme un mauvais fonctionnement des transformations de Lorentz dans le cas général où les vitesses des mouvements relatifs des repères sont quelconques, c'est-à-dire non parallèles aux axes de coordonnées (cela se pose en particulier lorsque l'on veut composer entre elles plusieurs transformations). Nous avons alors énoncé une série d'exigences portant sur la compréhension et la symétrie de ces transformations, à exprimer en utilisant un paramètre temporel ayant le sens d'un déplacement dans l'espace (voir le détail dans Guy, op.cit.) ; les transformations de Lorentz proposées sont les suivantes :

$$\vec{r}' = \gamma(\vec{r} - v.\vec{t}) \qquad \vec{t}' = \gamma(\vec{t} - \frac{v}{c^2}\vec{r}) \tag{75}$$

Ce qui se développe en :

$$x' = \gamma(x - vt_x) \qquad y' = \gamma(y - vt_y) \qquad z' = \gamma(z - vt_z) \tag{76}$$

et

$$t'_x = \gamma(t_x - \frac{v}{c^2}x) \qquad t'_y = \gamma(t_y - \frac{v}{c^2}y) \qquad t'_z = \gamma(t_z - \frac{v}{c^2}z) \tag{77}$$

Avec $t(t_x, t_y, t_z)$, $r(x, y, z)$, $t^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$, $v(v_x, v_y, v_z)$ de module v, et $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Remarques

1) Les relations précédentes sont semblables à celles des transformations spéciales pour les couples (x,t) et (x',t') (en ne tenant pas compte des conditions y = y', z = z') mais avec des vecteurs. Dans le facteur γ on notera que v intervient par son module qui est un scalaire. Ce scalaire intervient dans les facteurs vt et vr des transformations de Lorentz. Dans les transformations individuelles, on aurait éventuellement pu attendre des formulations contenant des termes du type $v_x t_x$ ou $v_x r_x$ par exemple, mais elles ne sont pas conformes à notre définition du *temps comme déplacement parallèlement à v*. Les vecteurs envisagés ici

sont vt et vr le long de la direction r ou v, et se projettent en vt_x égal à $v_x t$, ou en vr_x égal à $v_x r$, du fait de l'égalité $r_x/r = v_x/v = t_x/t$ (r_x est ici égal à x).

Les vecteurs quelconques reliés par les transformations n'ont pas besoin d'être parallèles à la direction commune t, v. Celle-ci intervient pour donner sens aux étalons de mesure des distances et des temps utiles pour donner leurs valeurs numériques aux composantes de tous les vecteurs (x, y, z, t_x, t_y, t_z).

2) On remarquera que, dans le cas où v est parallèle à Ox, on a $t = t_x$, $t_y = t_z = 0$ mais on n'a pas y' = y, z' = z, mais y' = γy et z' = γz. Ce qui exprime en bref le fait que les mesures le long des axes d'espace sont concernées par le temps… Pour ce qui regarde les nouvelles composantes du temps, on a également

$$t'_x = \gamma(t_x - \frac{v}{c^2}x) \qquad t'_y = -\gamma\frac{v}{c^2}y \qquad t'_z = -\gamma\frac{v}{c^2}z \qquad (78)$$

3) Franco (2006) a écrit des formules identiques à celles données ci-dessus. Si, pour parler du déplacement temporel, on envisage trois déplacements (que l'on pourra relier après-coup) le long des trois axes (au lieu d'en envisager un seul projeté selon les trois axes comme on vient de le faire), on écrit des transformations de Lorentz un peu différentes (voir Ziino, 1979 a et b ; Guy, 2004). L'adoption d'un déplacement unique projeté suivant les trois axes nous paraît plus conforme à la pratique.

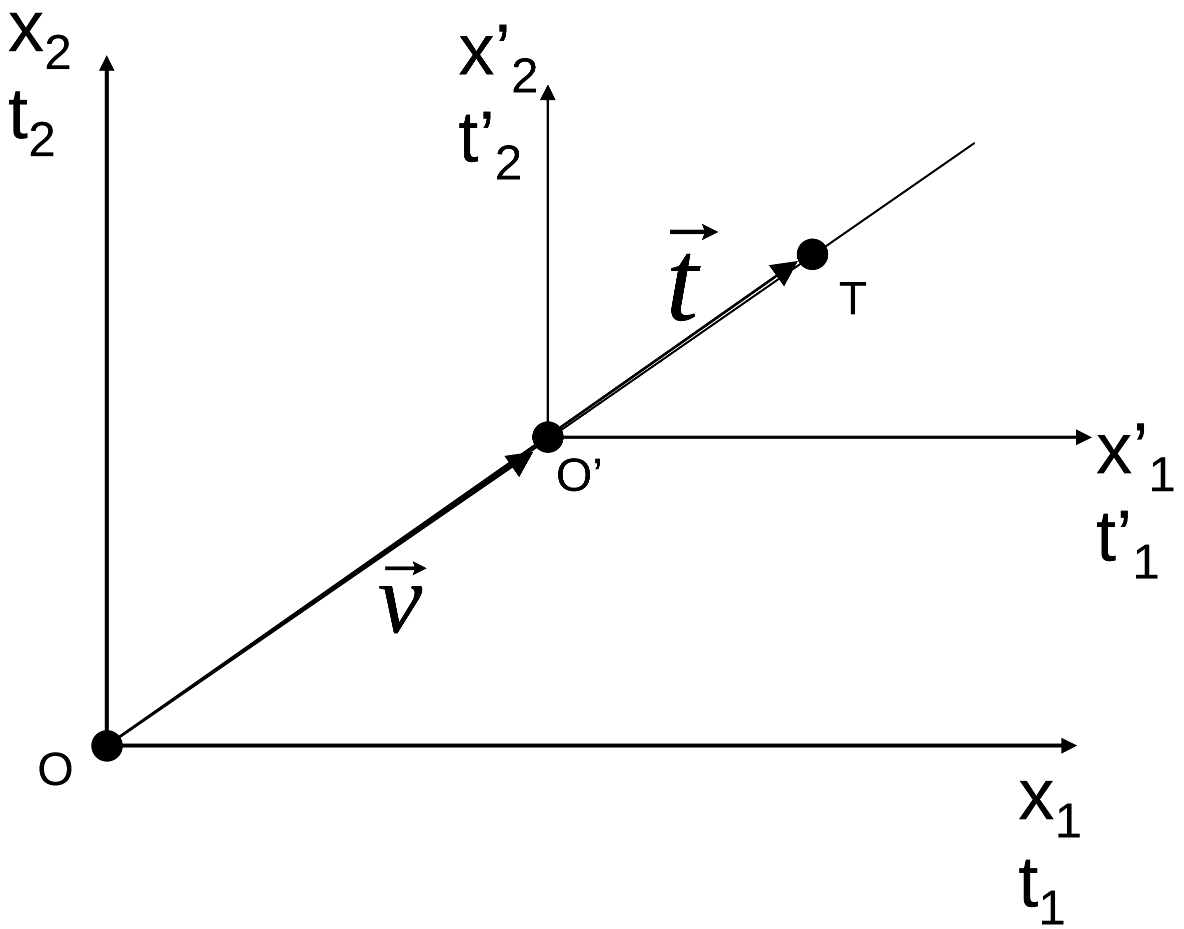

Figure 1

Les coordonnées d'espace (x_1, x_2) et de temps (t_1, t_2) sont définies dans le même repère : le temps est marqué par le mouvement d'un mobile de référence T (auquel on associe le vecteur t) qui se déplace dans l'espace où l'on définit les coordonnées spatiales. La direction du vecteur t est la même que celle du vecteur v du mouvement du phénomène étudié (par exemple : déplacement du repère mobile R' par rapport au repère au repos ; mouvement d'une charge électrique pour les équations de Maxwell ; mouvement de la particule de masse m pour les lois de la mécanique, de même direction que la quantité de mouvement p définie à partir de là). Le mouvement de T est décrit par t' dans le repère mobile.