RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA*

Zbigniew Oziewicz † ‡
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad Estudios Superiores
C.P. 54714 Cuautitlán Izcalli, Apartado Postal # 25, Estado de México
oziewicz@servidor.unam.mx

May 5, 2007

RESUMEN

Una solución del sistema de ecuaciones diferenciales de Maxwell, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el campo magnético $\mathbf{B}$, describe una radiación electromagnética, si y solo si se transporta la energía, es decir, si el vector de Poynting no desaparece en ningún marco de referencia, $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$. Es conocido que esto es posible si y solo si se cumplen dos ecuaciones algebraicas non-lineales, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, y, $\mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2$ (llamamos las ecuaciones externas de Plücker), [Heaviside 1893; Lightman et al. 1975, Capitulo 4, Problemas 4.5-4.6; Choquet-Bruhat et al. 1977, . . . , 1996, Problema en Capitulo V]. Se propone determinar primero la más general solución de las ecuaciones algebraicas no-lineales de Plücker, y después resolver ecuaciones diferenciales lineales de Maxwell. De ésta manera se demuestra que cualquier *radiación* electromagnética se describe en términos solamente de dos campos escalares, cuales introdujo Robert Yamaleev en 2005.

---

*Presented at: International Conference on Applied Analysis, Querétaro, 2007. Segundo Congreso Cientifico Tecnologico, Cuautitlan 2007.

†Supported by Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica, UNAM, Grant PAPIIT # IN104908.

‡A member of Sistema Nacional de Investigadores in México, Expediente # 15337.

ABSTRACT

A solution of the Maxwell differential linear equations, the electric and magnetic fields $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$, is said to be the electromagnetic *radiation*, if and only if there is a transport of energy, *i.e.* if the Poynting vector does not vanishes in no-one reference system, $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$. It is known [Heaviside 1893; Lightman et al. 1975, Chapter 4, Problemas 4.5-4.6; Choquet-Bruhat et al. 1977, ..., 1996, Problems in Chapter V], that this is the case if and only if holds the two nonlinear algebraic conditions, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, y, $\mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2$, to which we refer the exterior equations of the Plücker. It is proposed, to solve first the non-linear Plücker algebraic equations, and after look for solutions of the linear differential Maxwell's equations. In this way it is shown that each electromagnetic radiation needs no more than two scalar fields introduced by Yamaleev in 2005. These scalar fields are conceptualy diffrent from introduced by Edmund Whittaker in 1904, and are distinct from Debye potentials.

Physics and Astronomy Classification Scheme (PACS)

PACS 03.50.De - Maxwell theory: general mathematical aspects.
PACS 03.30 - Special relativity.
PACS 41.20 - Electric, magnetic, and electromagnetic fields.

Contenido

1 ¿Que es la radiación electromagnética?

Los textos sobre radiación electromagnética, necesitaron antes de todo la ecuación diferencial de onda, conocida como ecuación de Jean D'Alembert (operador D'Alembertian), ecuación de Laplace, o ecuación de Helmholtz, que son las ecuaciónes diferenciales lineales de segundo grado para potencial electromagnético. Claro que estas ecuaciónes lineales tienen la propiedad, obviamente, que suma de soluciones es solución. Por lo tanto la ecuación diferencial de ondas, matemáticamente es modelo de fenómeno lineal (interferencia). Ver, por ejemplo, [Landau & Lifshitz, desde 1951,..., 1975].

Pero a veces, no se observa explícitamente, por lo menos no desde el inicio de la discusión, que *no todas* las soluciones de ecuación diferencial de onda pueden modelar *radiación* electromagnética, debido a que la radiación no es una onda cualquiera, solamente onda cuando puede transportar una energía. Es decir, onda (como una solución de ecuación diferencial de onda) es una radiación si, y solo si, el vector de Poynting no desaparece en ningún marco de referencia, $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, [Poynting 1884; Heaviside 1893]. Este requisito no cumple cualquier solución de la ecuación diferencial de onda.

Es conocido [Heaviside 1893; Lightman et al. 1975, Capitulo 4, Problemas 4.5-4.6; Choquet-Bruhat et al. 1977, ..., 1996, Problemas en Capitulo V], que la radiación electromagnética es posible si y solo si, se cumplen dos ecuaciones algebraicas non-lineales (cuadráticas), las cuales aquí llamamos las ecuaciones exteriores de Plücker,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2. \tag{1}$$

En éste trabajo se propone determinar primeramente la más general solución de las ecuaciones algebraicas non-lineales de Plücker (1), y después resolver ecuaciones diferenciales lineales de Maxwell. De ésta manera se demuestra que cualquier radiación electromagnética, como fenómeno no-lineal (1), se describe en términos de dos campos escalares.

1.1 Comentario (Whittaker 1904, Debye, Hogan & Ellis 1991, Yamaleev 2005)**.** Edmund Whittaker en 1904, expresó campo electrico y campo magnetico como las *segundas* derivadas parciales de pareja de los campos escalares, curl $\equiv$ rot,

$$\Box\,\psi = 0 = \Box\,\phi, \qquad \mathbf{E} \simeq \operatorname{curl}\operatorname{curl}\psi + \operatorname{curl}\,\partial_{ct}\,\phi, \quad \text{etc.} \tag{2}$$

Las expresiones de Whittaker sufrio defecto que no son simetricos en coordenadas x, y, z. Por otro lado, la pareja de potenciales escalares de Peter Debye, $\{\psi_E, \psi_M\}$, permite expresar los campos electrico y magnetico tambien como las *segundas* derivadas parciales, donde index-trashed expresiones son simetricas en coordenadas x, y, z,

$$E_k \simeq 2(1 + x^i \partial_i)\partial_k \psi_E - x^k \partial_k^2 \psi_E + \text{"}\partial_k \partial_{ct} \psi\text{"}. \tag{3}$$

Idea que *cada* solucion de ecuaciones de Maxwell en vacio, se puede expresar en terminos de dos potenciales escalares de Debye, fue desarollado por Hogan & Ellis en 1991, entre algunos otros autores.

En presente articulo, nosotros no interesa cualquiera solucion de los ecuaciones de Maxwell en vacuo, pero solamente las *radiaciones* electromagneticas, no necesariamente en vacuo. Nosotros interesa solamente los campos electromagneticos conocidos como puros (= decomposables) y nulos, y tambien conocidos alternativamente como 'transversales'. Robert Yamaleev en 2005 adivino las expresiones de los campos electricos y magneticos solamente para la radiación, no necesariamente en vacuo, en terminos de las *primeras* derivadas parciales de una pareja de los campos escalares. Relativo a la observador inercial, $R \equiv \partial_{ct}$ (uno campo vectorial), the Yamaleev expresiones son siguientes, [Yamaleev 2005, Sección 3, page 5],

$$\mathbf{E}(R) = (\partial_t \phi) \operatorname{grad} \psi - (\partial_t \psi) \operatorname{grad} \phi, \quad \mathbf{B}(R) = (\operatorname{grad} \psi) \times_R (\operatorname{grad} \phi). \tag{4}$$

Presente articulo tiene objetivo dar una motivacion y demostracion de los expressiones de Yamaleev, (4), basandolo en conceptos de vector de Poynting, y de la definicion de la relatividad de los campos electrico y magnetico, como propuso Hermann Minkowski en 1908.

La solución de las ecuaciones algebraicas non-lineales de Plücker (1), exige el conocimiento de los conceptos matemáticos fundamentales del álgebra de Grassmann. Además supongamos el conocimiento de los operadores diferenciales independientes de coordenadas. Para conveniencia de lector, los Apéndices A–H, contienen breves comentarios matemáticos sobre estos temas.

2 Los campos eléctrico y magnético son relativos

Oliver Heaviside desde 1876 publicó muchos artículos sobre fenómenos electromagnéticos y propagación de ondas electromagnéticas, y además una monografía 'Electromagnetic Theory' en tres volúmenes, [1893, 1899, 1912]. Entre muchos otros logros, Oliver Heaviside demostró en 1888, que los campos eléctricos y magnéticos son relativos, son dependientes de elección de marco de la referencia!

La mayoría de los profesores y alumnos de las carreras de Ingeniería e Ingeniero Mecánico-Electricista en particular, pueden considerar que la relatividad de los campos eléctricos y magnéticos, pueden ser ignorados para los Ingenieros, y que para problemas de Ingeniería Eléctrica y Electrónica es suficiente considerar solamente un marco de referencia, planeta Tierra, Tierra en repaso. Con este punto de vista la teoría de relatividad, que dió inicio Oliver Heaviside en 1888, y cual presentación mas conocida es de Albert Einstein en 1905, y menos conocida, pero mas clara y profunda, de Hermann Minkowski en 1908, se puede, o incluso debe ser, ignorada totalmente en la enseñanza de electromagnetismo para los Ingenieros. Se considera que la teoría de la relatividad, y la relatividad del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en particular, solamente complica la teoría de electromagnetismo, y no es ninguna ventaja para la carrera del ingeniero mecánico electricista. Por lo tanto los textos de electromagnetismo, y los programas de enseñanza de electromagnetismo, ignoran totalmente la teoría de la relatividad.

Un objetivo de éste articulo es tratar de convencer que la teoría de relatividad no solamente profundiza entendimiento de electromagnetismo, pero que además simplifica considerablemente la teoría del electromagnetismo, simplifica la estructura matemática, simplifica el entendimiento de las cuatro leyes de Maxwell, y simplifica la estructura fundamental de la teoría de la radiación electromagnética. Gracias a la teoría de relatividad, electromagnetismo memorizado artificialmente, se puede entender con razones claras. Estoy seguro que el concepto de campos eléctricos y magnéticos *relativos*, dependientes de marco de referencia, puede ayudar mucho a los alumnos de Ingeniería a entender los cursos de electromagnetismo, y ondas electromagnéticas.

¿Que significa que los intensos campos eléctricos y magnéticos, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, asi mismo como los extensos desplazamientos, $\mathbf{D}$ y $\mathbf{H}$, son dependientes de elección de marco de referencia? Sean dos observadores, Rosa y Pedro, los denotaremos con letras R y P, corespondiente, y sea que Pedro se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ relativa a Rosa (esta velocidad relativa $\mathbf{v}$ la observa Rosa). Ambos detectaron los campos eléctricos y magnéticos de los mismo fuentes. Denotamos resultados de mediciones de Rosa por $\{\mathbf{E}(R), \mathbf{B}(R)\}$, y resultados de los mediciones de Pedro por $\{\mathbf{E}(P), \mathbf{B}(P)\}$. ¿Como estas mediciones están relacionadas? En discusión, supongamos para simplificar que Pedro se mueve perpendicularmente a campos observados por Rosa, esto es, supongamos que, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}(R) = 0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}(R) = 0$. Heaviside en 1888, introdujo un factor escalar (conocido en el presente como un factor de Antoon Lorentz), y deduce las siguientes fórmulas

$$1 \leq \gamma_{\mathbf{v}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}} < \infty, \qquad \begin{aligned} \mathbf{E}(P) &= \gamma_{\mathbf{v}} \left\{ \mathbf{E}(R) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times_R \mathbf{B}(R) \right\}, \\ \mathbf{B}(P) &= \gamma_{\mathbf{v}} \left\{ \mathbf{B}(R) - \frac{\mathbf{v}}{c} \times_R \mathbf{E}(R) \right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Debe notarse que las formulas de Heaviside (5), son estrictamente verdaderas solamente si la velocidad relativa es perpendicular a los campos eléctrico y magnético, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}(R) = 0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}(R)$. En continuación, para simplicidad, se usaron unidades tales que la magnitud escalar de velocidad de la luz sea uno, $c = 1$.

La fuente de campo eléctrico $\mathbf{E}$ es una carga eléctrica (y/o spin en movimiento). En caso si marco de referencia, un observador R, esta en reposo relativo a carga eléctrica de fuente, este observador detecta con su medidas la presencia de no-cero campo eléctrico, $\mathbf{E}(R) \neq \mathbf{0}$, pero cero campo magnético $\mathbf{B}(R) = \mathbf{0}$.

Pedro P, el cual se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ relativa a la carga eléctrica de fuente, es decir se mueve relativo a Rosa R, detecta no cero campo magnético

$\mathbf{B}(P) = -(\gamma_{\mathbf{v}}\mathbf{v}/c) \times_R \mathbf{E}(R) \neq \mathbf{0}$, y detecta mayor valor de campo eléctrico $\mathbf{E}(P) = \gamma_{\mathbf{v}}\mathbf{E}(R) \neq \mathbf{E}(R)$. Moral de consideraciones de Heaviside en 1888, es que sin elección de marco de referencia, sin observador, no tenemos los campos eléctricos y magnéticos. Cada campo eléctrico impide una anterior elección de marco de referencia, elección del observador. Claro, que para todas las mediciones de los ingenieros este marco de referencia somos nosotros, el planeta Tierra, y lector puede interrumpir la lectura de este texto con la conclusión que es mejor olvidar relatividad de campo eléctrico.

Pero llega la siguiente observación. Para tener un campo eléctrico, es necesario un observador. ¿Si no hay observadores ni laboratorios, no hay electromagnetismo? ¿Cuál es éste campo físico cuales existe y es independiente de observadores, pero es dependiente de su fuentes?

El autor propone la teoría de relatividad que no solamente dice que el campo eléctrico es relativo a marco de referencia, pero también postula que existe un campo electromagnético objetivo, absoluto, es decir el campo independiente de observadores, una realidad física. Este campo absoluto el autor lo identifica como campo el cual introdujo Hermann Minkowski en 1908, conocido en el presente como 'el tensor de Faraday F', pero justamente debería tener el nombre de 'bivector de Minkowski de campo electromagnético'. Un 'tensor de Faraday', un campo bivectorial denotado por letra F, no lo introdujo Michael Faraday, sino Hermann Minkowski en 1908. La teoría de la relatividad donde se postula el campo electromagnético F como absoluto (es decir, independiente de los marcos de referencias), el autor lo llamo 'groupoide (no grupo!) de relatividad', para distinguilo de la teoría de relatividad de Einstein (cual es el grupo de Lorentz de relatividad).

La teoría de la relatividad donde el campo electromagnético F se postula como absoluto, es diferente desde de la teoría de relatividad de Einstein, la cual postula que una biforma diferencial de campo electromagnético F es Lorentz-covariante con respecto de grupo de isometría de Lorentz, es decir, F se considera como *dependiente* de elección de marco de referencia. Por ejemplo, Landau y Lifshitz [1951,..., 1975, Capitulo 3, Secciones 24-25], postula que el potencial electromagnético A, donde $F = dA$, es Lorentz-covariante, eso es, A es dependiente de elección de marco de referencia.

Objetivo de presente texto es la defineción de la *radiación* electromagnética, y para esta meta, usamos solamente el Teorema de Heaviside (5) sobre la relatividad de los campos eléctricos y magnéticos. Accidentalmente y afortunadamente, para la radiación, el postulado sobre F no es importante, debido a que el mismo teorema de Heaviside (5) se puede deducir en ambas teorías.

Las predicciones son diferentes solamente si, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \neq 0$, o si, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \neq 0$. Por lo tanto, en este texto estamos con el axioma en que el campo electromagnético F es absoluto, este axioma evita considerar un grupo de Lorentz, y no afecta el concepto de radiación electromagnética.

La novedad que introdujo la teoría de relatividad a inicios del siglo XX fué que todos los conceptos de la física y de ingeniería se clasifican a dos grupos: conceptos relativos (dependientes de la elección de marco de referencia), y conceptos absolutos (que son independientes de marcos de referencias). En la relatividad de Einstein, se clasifican los conceptos como: Lorentz-invariantes, Lorentz-covariantes, y otros. Todos los conceptos conocidos en siglo XIX son relativos, como por ejemplo el campo eléctrico $\mathbf{E}$ (5), que se llamaron en textos innadecuadamente como conceptos 'no-relativista'. Los conceptos nuevos, no conocidos en siglo XIX, son conceptos absolutos, esto es, los conceptos independientes de elección de marco de referencia. Estos conceptos nuevos, como por ejemplo el campo electromagnético F de Minkowski, una cargacorriente (una palabra), se llamaron en textos innadecuadamente como 'relativista', y nosotros evitamos éste termino.

¿Para que sirven conceptos absolutos? Los conceptos absolutos dicen, que las leyes de física (de electricidad, de magnetismo, de termodinámica, etc.) deben ser independientes de quien observa éste Mundo, y deben ser válidos también sin observadores particulares, por lo tanto deben expresarse en términos los conceptos absolutos. La eliminación de los irrelevantes marcos de referencias (los observadores) desde leyes de física, simplifica y profundiza entendimiento de física.

Concluimos la discusión anterior. Se postula que una biforma diferencial F describe un campo electromagnético absoluto, el cual es dependiente de sus fuentes, un campo el cual existe independientemente si es, o no es, detectado por observador (es lo mismo para un observador durmiendo). Los campos eléctricos y magnéticos son relativos, y son funciones de las dos variables independientes, $\mathbf{E}(F, \mathrm{Obs})$ y $\mathbf{B}(F, \mathrm{Obs})$, donde 'Obs' denota un observador (o marco de referencia).

Hermann Minkowski definió los campos eléctrico y magnético como un producto (concomitant) de campo absoluto primitivo F, con un primitivo observador representado como un vector (timelike) en el espaciotiempo. La Definición que sigue necesita los conceptos de bivector de Grassmann, y de estrella de Hodge, que se explican brevemente (y no suficientemente) en Apéndices A-D.

2.1 Definición (Hermann Minkowski 1908)**.** Sea, $(\mathrm{Obs})^2 = -1$.

$$E(F, \mathrm{Obs}) \equiv (\mathrm{Obs}) \cdot F, \quad B(F, \mathrm{Obs}) \equiv \star\{(\mathrm{Obs}) \wedge F\} = (\mathrm{Obs}) \cdot (\star F). \tag{6}$$

2.2 Teorema (Hermann Minkowski 1908)**.**

$$\begin{gathered} F \simeq E \wedge (\mathrm{Obs}) + \star\{(\mathrm{Obs}) \wedge B\}, \\ F^2 \simeq \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2, \qquad F \cdot (\star F) \simeq 2\,\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}. \end{gathered} \tag{7}$$

En el Teorema 2.2 de Minkowski usamos intencionalmente el símbolo $\simeq$, en lugar de signo de ecuación $=$, debido a que el campo F de la izquierda, se postula como independiente de elección de observador, mientras que la expresión a la derecha es explícitamente dependiente de observador.

2.3 Definición (Rainich 1925; Plebański 1961; Synge 1967)**.** El campo electromagnético absoluto F se llamó como sigue:

eléctrico si y solo si, $0 < F^2$; *nulo* si y solo si, $F^2 = 0$; *magnético* si y solo si, $F^2 < 0$;
puro (decomposable) si y solo si, $F \wedge F = 0$; *impuro* si y solo si, $F \wedge F \neq 0$.

2.4 Teorema. *Estrella de Hodge en Apéndice C, resulta en las siguientes identidades,*

$$\star(F \wedge F) = (\star F) \cdot F, \tag{8}$$
$$\star(F \wedge \star F) = (\star F)^2 = F \cdot (\star^2 F) = (\det g) F^2, \tag{9}$$
$$\star(\star F \wedge \star F) = (\star F) \cdot (\star^2 F) = (\det\ g)(\star F) \cdot F. \tag{10}$$

2.5 Definición (Producto cruz (o vectorial) de Gibbs)**.** Para el Producto cruz de los vectores necesito el producto de Grassmann y estrella de Hodge (Apéndice C). Este producto $\times$ no se puede definir como una sola expresión en una dimensión cualquiera. Éste articulo necesita el producto cruz solamente en dimensión cuatro, en espacio-tiempo, debido a que los campos eléctricos y magnéticos son dependientes de tiempo. Sea U, W, V son tres vectores en dimensién cuatro. El producto cruz de dos vectores U y V es W-dependiente, y se define como

$$U \times_W V \equiv \star(U \wedge W \wedge V) = -V \times_W U. \tag{11}$$

2.6 Ejercicio. Sea Rosa, R, observa-detecta el campo eléctrico $\mathbf{E}(R)$ y el campo magnético $\mathbf{B}(R)$. Esto implica que, $R \cdot \mathbf{E} = 0 = R \cdot \mathbf{B}$. Calcule el siguiente triple producto vectorial en espacio-tiempo de dimensión cuatro, $(\mathbf{E} \times_R \mathbf{B}) \times_R \mathbf{B}$. Respuesta:

$$(\mathbf{E} \times_R \mathbf{B}) \times_R \mathbf{B} = -(\det g)\{\mathbf{B}^2\, \mathbf{E} - R^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\, \mathbf{B}\}. \tag{12}$$

2.7 Definición (Vector de Poynting 1884; Heaviside 1893)**.** Una energía que transporta una radiación electromagnética es relativa, es dependiente del observador R, y es dada por el vector de Poynting, $\mathbf{E}(F,R) \times_R \mathbf{B}(F,R)$. Se dice que el campo electromagnetico absoluto F es una *radiación* electromagnética si y solo si para cada observador R, el vector de Poynting no desaparece,

$$\forall\, R, \qquad \mathbf{E}(F,R) \times_R \mathbf{B}(F,R) \neq \mathbf{0}. \tag{13}$$

2.8 Teorema (¿Cuando el vector de Poynting no se nula?)**.** *Sea f un campo escalar, tanto que la velocidad de Pedro relativo a Rosa es, $\mathbf{v}/c = f \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$. El vector de Poynting de Pedro se desaparece (se nula) si y solo si el escalar f cumplió con ecuación cuadrática,*

$$f^2 \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})^2 = 1 + f \cdot (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad \triangle \equiv (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2, \tag{14}$$

$$|\mathbf{v}| = c \quad \Longleftrightarrow \quad \triangle = 0. \tag{15}$$

Demonstración. Para la velocidad relativa, $\mathbf{v}$, entre dos marcos de referencia, tenemos,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{v} \cdot P = 0 \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = f \cdot (\mathbf{E} \times_P \mathbf{B}) = f \star (\mathbf{E} \wedge P \wedge \mathbf{B}), \tag{16}$$

cf. [Lightman et al. 1975, Capitulo 4, Problema 4.5].

Insertar las formulas de Heaviside (5), dentro del vector de Poynting de Pedro, y este resulta en ecuación (14). En geometría no-Euclideana, la forma de volumen es timelike, $\varepsilon^2 = -1$, ver Ejercicio D.5. Entonces

$$\frac{\mathbf{v}^2}{c^2} = -f^2 \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})^2 = -1 - f \cdot (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \tag{17}$$

$$2f \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})^2 = \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \pm \sqrt{\triangle}. \tag{18}$$

Aquí, $\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2$, es densidad de energía de campo electromagnético (dependiente de marco de referencia). Entonces el vector de Poynting de Pedro se nula (no transporte de energía) para la velocidad relativa

$$\frac{\mathbf{v}^2}{c^2} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \pm \sqrt{\triangle}}{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \mp \sqrt{\triangle}}. \tag{19}$$

Entonces, $\mathbf{v}^2 = c^2$, si y solo si, $\triangle = 0$. Por lo tanto la condición, $\triangle = 0$, es necesaria y suficiente para que el vector de Poynting de transporte de flujo de energía no se nula en ninguna marca de referencia, es decir, esta condición es necesaria y suficiente para que una solución de ecuaciones de Maxwell, $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$, sea la radiación electromagnética. □

La radiación electromagnética también se llama campo electromagnético puro y nulo [Robinson 1961; Choquet-Bruhat et al. 1977, 1996].

2.9 Corolario. Plücker: un álgebra de radiación,

$$\begin{aligned} F \wedge \star F = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad F^2 \simeq \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = 0, \\ F \wedge F = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad F \cdot (\star F) \simeq 2\,\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

2.10 Comentario (Idea principal)**.** Primero resolver las condiciones algebraicas non-lineales de radiación (20). Determinar el más general campo electromagnético absoluto F para la cual se cumplieron las condiciones algebraicas (20). En segundo paso resolver las ecuaciones diferenciales lineales de Maxwell.

En la metodologa histórica de los textos sobre de radiación de ondas electromagnéticas, es al contrario. Primero se buscan las más generales soluciones de las ecuaciones diferenciales de Maxwell (en términos de los potenciales electromagnéticos, $F = dA$), y el segundo paso seleccionar entre estas soluciones, las que corresponden a la radiación electromagnética, es decir, las cuales transportaron no-nula energía.

Las condiciones necesarias non-lineales para la radiación electromagnética, son condiciones algebraicas cuadráticas, (20), conocidas como ecuaciones de Plücker, para que una bi-forma F este decomposable (es decir pura), y nula,

$$F \wedge F = 0 = F \wedge (\star F) \quad \Longrightarrow \quad F = k \wedge l, \quad F^2 = 0, \quad (k \cdot l)^2 = k^2 l^2. \tag{21}$$

2.11 Teorema. *Sea F es puro y nula, $F = k \wedge l$, y $F^2 = 0$. Se pueden elegir las formas, k y l, tal que, k es una forma de onda, $k^2 = 0 = k \cdot l$.*

Demostración. Decomposable bi-forma F tiene $GL2$-libertad:

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Si $l^2 = 0$ entonces $k \cdot l = 0$. Sea $l^2 \neq 0$, entonces una matriz,

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -(k \cdot l)/l^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}, \tag{23}$$

demuestra que el bivector $\mathbf{F}$ puro y nulo, tiene vector de onda $\mathbf{k}$, tal que, $\mathbf{F} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{l}$,

$$\left(k - \frac{k \cdot l}{l^2} l \right)^2 = k^2 - \frac{k \cdot l}{l^2} = 0. \quad \square \tag{24}$$

2.12 Corolario. Sea $F \neq 0$, $k \wedge F = 0$, $k \cdot F = 0$. Entonces, $k^2 = 0$, y k es una forma diferencial de onda,

$$\left. \begin{array}{r} k \wedge F = 0 \\ k \cdot F = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad k^2 F = (i_k \circ e_k - e_k \circ i_k) F = 0. \tag{25}$$

Si $F = k \wedge l$, entonces, $l \cdot F = -l^2 k$.

Teorema 2.11 dice que el vector de onda $\mathbf{k}$ es un vector de Killing de simetría de radiación F. Claro, que además de F, también $\star F$ es puro y nulo. Debido que, $F \wedge \star F = 0$, estos bivectores tienen en común un vector de onda, $\star F = k \wedge m$. Los formas l y m describen polarización de radiación.

2.13 Ejercicio. Deduce los siguientes productos escalares,

$$m \cdot k = 0 = m \cdot l, \qquad m^2 = -\{\det_{\varepsilon}(g^{-1})\} \, l^2. \tag{26}$$

Según la definición de Minkowski 2.1, el campo eléctrico de radiación, como lo detecta Rosa, es dado como, $\mathbf{E}(R) = (k \cdot R)\mathbf{l} - (l \cdot R)\mathbf{k}$, donde el escalar, $k \cdot R$, es energía (frecuencia) de radiación como lo detecta la observadora Rosa R.

3 Operador de onda de Jean D'Alembert 1743 es potencia de operador de Dirac

La ecuación de onda, conocida como ecuación de Jean d'Alembert, es una ecuación diferencial de segundo grado, la cual es independiente de coordenadas, y lo que es más importante es que siempre es potencia cuadrática de operador diferencial de grado uno, conocido como operador de Dirac. En Apéndices E-G, tratamos brevemente los operadores diferenciales de grado uno como operadores independientes de coordenadas. Un operador diferencial de primer orden, $\operatorname{grad} + \operatorname{div}$, se llamó operador de Dirac. Un operador de onda es una potencia de operador de Dirac,

$$\triangle \equiv (\operatorname{grad} + \operatorname{div})^2 = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} + \operatorname{grad} \circ \operatorname{div}\,. \tag{27}$$

En una dimensión cualquiera tenemos siempre una relación adicional,

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{grad} \simeq \operatorname{rot} \circ \operatorname{rot}, \tag{28}$$

ver Corolario H.2. Para más sobre esta tema referirse a trabajos de [Dirac 1928; De Rham 1931; Riesz 1946; Kähler 1961]. Para las formas homogénea de grado fijo, como es el campo electromagnético absoluto F de grado dos, tenemos

$$(\operatorname{grad} + \operatorname{div})F = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{grad} F = 0 \quad \& \quad \operatorname{div} F = 0 \tag{29}$$

Un campo físico (electromagnético, fluido en hidrodinámica, etc), que es potencial (no-rotacional), $\operatorname{grad} F = 0 = \operatorname{rot} F$, y es no-comprensible, $\operatorname{div} F = 0$, se llamó un campo armónico (también monógamo).

Para campo no-rotacional, $\operatorname{rot} F = 0$, tenemos potencial, $F = \operatorname{grad} A$, y si F es además no-comprensible, $\operatorname{div} F = 0 = (\operatorname{div} \circ \operatorname{grad})A$. Ésta última ecuación diferencial de segundo orden, es casi de ecuación de onda, si condicionalmente se demanda una norma de Ludwig Lorenz (de Dinamarca, en 1867) que, $(\operatorname{grad} \circ \operatorname{div})A = 0$.

Todas las ecuaciones diferenciales de ondas son ecuaciones lineales, donde una suma de soluciones, es solución, tenemos interferencia de los ondas. La ecuación de onda para onda monocromática (de energía = frecuencia fija), una onda periódica en el tiempo, se reduce a la ecuación diferencial de Helmholtz.

El objetivo de este texto es explicar que no todas las soluciones de la ecuación de onda son radiaciones que transportaron energía. Las extra condiciones para transportar energía son condiciones algebraicos no-lineales (20). Estas condiciones no-lineales, selectas entre todas las soluciones de ecuaciónes lineales de Maxwell, y ecuación lineal de onda, solamente la radiación electromagnética es verdadera. Estas condiciones no-lineales son conocidas como campo electromagnético 'puro u nulo', y son algebraicos, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$. La superposición de dos radiaciones, no es radiación.

4 Ecuaciones diferenciales de Maxwell

Las Ecuaciones diferenciales de Maxwell, son ecuaciones lineales de primer grado, donde la suma de las soluciones es una solución. Estas ecuaciones diferenciales se presentan en los textos usando tres operadores, gradiente, divergencia, y 'curl = rotación', ver Apéndices E-F-G. No es conocido que se puede evitar el operador curl, y presentar todas las cuatro ecuaciones de Maxwell en términos de gradiente y de divergencia, solamente, pero con costo de concepto de álgebra de Grassmann, [Cruz Guzmán & Oziewicz 2003]. Una ventaja de los operadores de gradiente y de divergencia es que ellos son independiente de la orientación. Al contrario, curl, es dependiente de selección de orientación.

- Dos leyes, Gauss magnético + ley de Faraday, cada una es dependiente de marco de referencia, son equivalentes a solo una ley de conservación de energía-trabajo para el campo electromagnético absoluto, es decir, F es ir-rotacional, potencial, $dF = 0 \iff F = dA$.

- Ley de Gauss eléctrico + ley de Ampère-Oersted, juntas, son dos consecuencias de una ley absoluta (independiente de marco de referencia) de conservación de carga-corriente absoluta, $\delta J = 0 \iff J = \delta G$, *i.e.* J es no-comprensible. En ausencia de las fuentes el campo electromagnético es armnico (o monogenic), ver Apéndice H,

$$\delta F = 0 \quad \iff \quad F = \delta\,\mathrm{Hertz}, \tag{30}$$

  [Cruz Guzmán & Oziewicz 2003].

Deberíamos subrayar, que las ecuaciones de Maxwell solamente, *no* implican ecuaciones de onda para potencial electromagnético. El campo electromagnético absoluto, $F = \mathrm{grad}\,A$, es non-comprensible. Entonces $\mathrm{div}\,F =$

$0 = (\mathrm{div} \circ \mathrm{grad})A$, es un 'mitad' de ecuación de onda (27). Para recibir la exacta ecuación de onda para potencial electromagnético A, Ludwig Lorenz en Dinamarca en 1867, introdujo la extra condición, conocida como una norma de Lorenz, la cual es suficiente, pero no necesaria, $\mathrm{div}\, A = 0$, o la cual es 'necesaria' $(\mathrm{grad} \circ \mathrm{div})A = 0$. La Norma de Ludwig Lorenz, para tratamiento de radiación electromagnética de los fotones, es fuente de problemas, debido a que ésta norma, como cualquier otra, por ejemplo la norma de Coulomb, no es ley de física.

Concluimos esta Sección. La Ecuación diferencial de onda (de D'Alembert) para el potencial electromagnético, necesita además de ecuaciones experimentales de Maxwell, una norma matemática de Ludwig Lorenz, la cual no es ley de física.

5 Radiación electromagnética = Plücker + Maxwell

En uno de los textos más conocidos de física teórica, el texto de Landau & Lifshitz [desde 1941,...,1975, Capitulo 9], una radiación electromagnética se define como la solución de la ecuación de onda la cual está lejos de las fuentes de radiación. Ésta definición no subraya (aún omita), una propiedad más importante de radiación, que la radiación no es fenómeno lineal. La misma definición de radiación electromagnética se encuentra en casi los todos textos, ver también [Jauch y Rohrlich 1955, 1976, primera página del Capitulo 2 'Radiación Electromagnética'].

En este texto deseamos ser muy claros, y definimos la radiación electromagnética como las particulares soluciones de las ecuaciones lineales diferenciales de Maxwell, las cuales cumplieron con condiciones algebraicas no-lineales de Sección 2, es decir, soluciones de ecuaciones de Maxwell que transportaron energía electromagnética. Esta definición se reduce al sistema de las cuatro ecuaciones para el campo electromagnético absoluto F, para perfecto dielectrico y dimagnetico,

$$F \wedge F = 0, \qquad dF = 0, \qquad \delta F = 0, \qquad F^2 = 0. \tag{31}$$

5.1 Teorema (Darboux 1887; Stachel 1969)**.** *$F \wedge F = 0$ y $dF = 0$, implica que existen dos campos escalares tales que, $F = d\phi \wedge d\psi$.*

Demonstración. Gaston Darboux, profesor de Collège de France, a finales del siglo XIX, clasificó las formas diferenciales de grado uno. Sea $A \neq 0$, es una forma diferencial de grado uno, en dimensión cuatro. Según Darboux, son cuatro posibilidades, dependiente del numero mínimo de los campos escalares, $\{\phi, \psi, \ldots\}$, se necesita para describir ésta forma diferencial,

$$\begin{array}{llcr} \text{Darboux class 1:} & A = d\psi & \Longrightarrow & dA = 0 \\ \text{Darboux class 2:} & A = \phi\, d\psi & \Longrightarrow & A \wedge dA = 0 \\ \text{Darboux class 3:} & A = \phi\, d\psi + d\alpha & \Longrightarrow & (dA) \wedge (dA) = 0 \\ \text{Darboux class 4:} & A = \phi\, d\psi + \beta d\alpha & \Longrightarrow & (dA) \wedge (dA) \neq 0. \end{array} \tag{32}$$

Ecuación, $dF = 0$ (a veces llamado 'identidad de Bianchi'), implica un potencial A tal que, $F = dA$. Desde cuatro posibilidades en clasificación de Darboux, solamente class 2 y 3 cumplieron con, $F \wedge F = 0$. Entonces, $F = d\phi \wedge d\psi$. □

Esto significa que cualquier radiación electromagnética se describe en términos solamente de los dos campos escalares. El campo electromagnético, y en particular la radiación electromagnética en términos de la pareja de los campos escalares fué considerado en totalmente otro enfoque, aparte de Whittaker en 1904, por Petrus Debije (Peter Debye) alrededor de 1910, por Synge [1965], Stachel [1969], Hogan [1987]. Los todos estos esfuerzos presentaron los campos electrico y magnetico, como la *segunda* derivada de los campos escalares (potenciales) de Debye, [Garcia-Olivo et al. 2006, 2007]. Robert Yamaleev en 2005 adivino presentaciones de los campos electrico y magnetico en terminos de la *primiera* derivada de los dos campos escalares (potenciales de Yamaleev).

Vale recordar que el espacio-tiempo es absoluto, es independiente de los observadores. Minkowski en 1909 uso la frasa 'absolute World' for what is presently known as espaciotiempo.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones para radiación electromagnética en términos de la pareja de los campos escalares $\{\phi, \psi\}$, se reduce a la siguiente ecuación diferencial (34), donde, $\triangle = \delta \circ d$, es un operador de D'Alembert para ondas escalares en espaciotiempo, y una condición algebraica,

$$F^2 = \{(d\phi) \cdot (d\psi)\}^2 - (d\phi)^2 (d\psi)^2 = 0, \tag{33}$$

la cual asegura el transporte de energía (no nulo el flujo de energía),

$$[d\phi, d\psi] \equiv g[g^{-1}d\phi, g^{-1}d\psi] \equiv g[\operatorname{grad}\phi, \operatorname{grad}\psi],$$
$$F = d\phi \wedge d\psi, \qquad \delta(d\phi \wedge d\psi) = -(\triangle\phi)d\psi + (\triangle\psi)d\phi + [d\phi, d\psi] = 0, \tag{34}$$
$$(d\phi)^2(d\psi)^2 = \{(d\phi)\cdot(d\psi)\}^2 \quad \begin{cases} = 0 & \text{con frente de onda,} \\ \neq 0 & \text{sin frente de onda.} \end{cases} \tag{35}$$

La ecuación diferencial de Maxwell (34) expresa, por un lado, la ley de conservación de carga-corriente en ausencia de los fuentes (es una consecuencía de leyes de Gauss eléctrico y de ley de Ampère-Oersted en vació, después de la eliminación de marco de referencia). Pero, por otro lado, impide que una distribución geométrica de dimensión dos, $\operatorname{grad}\phi \wedge \operatorname{grad}\psi$, sea en involución, es decir, según el teorema de Frobenius, ésta distribución es integrable, esto es, existe integral subvariedad de dimensión dos.

Los campos eléctrico y magnético de *radiación* electromagnética, relativos a la observación por campo vectorial de Rosa R, la cual es un marco de referencia, según la definición de Minkowski en 1908, tienen las expresiones siguientes,

$$\mathbf{E}(R) = (R\phi)\operatorname{grad}\psi - (R\psi)\operatorname{grad}\phi, \quad \mathbf{B}(R) = (\operatorname{grad}\psi) \times_R (\operatorname{grad}\phi). \tag{36}$$

En fórmulas (36), el campo escalar $R\phi$, es una derivada (direccional) de campo escalar ϕ, en dirección del campo vectorial R,

$$R\phi \equiv (d\phi)R = \{(g \circ g^{-1})d\phi\}R = g\{(\operatorname{grad}\phi) \otimes R\} = (\operatorname{grad}\phi)\cdot R. \tag{37}$$

Cabe mencionar que la observadora Rosa R en expresiones de la radiación electromagnetica (36), no es necesariamente la observadora inercial. Por lo tanto de conocida forma de la ley de Gauss para el campo magnetico es strictamente correcta solamente para los observadores inerciales, ver [Fecko 1997, page 4549, formula (6.8b); Kocik 1997, formula (4.12); Cruz & Oziewicz 2003],

$$\operatorname{div}\{\mathbf{B}(R)\} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad dgR = 0, \quad \textit{i.e. } R \text{ es} \begin{cases} \text{inercial} \\ \text{holonomic} \\ \text{integrable} \end{cases} \tag{38}$$

Robert Yamaleev adivino los expressiones (36) para la observadora inercial $R = \partial_t$, [Yamaleev 2005, Sección 3, page 5].

Cada radiación electromagnética es una biforma diferencial armónica, $F = d\phi \wedge d\psi$, la cual es absoluta (independiente de marco de referencia), es pura y nula (transporta energía), y satisface las ecuaciones diferenciales de Maxwell en vació, o es equivalente a una ecuación de Dirac para el campo armónico, $(d + \delta)F = 0$. Esta definición de radiación tiene la ventaja de ser independiente del irrelevante marco de referencia. Al contrario, una descripción de radiación (y otros fenómenos electromagnéticos) en términos de los campos eléctricos y magnéticos, $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$, se involucra en propiedades de los marcos de referencias (5), los cuales son irrelevantes para fenómenos electromagnéticos [Cruz Guzmán & Oziewicz 2003]. La descripción de radiación en términos del potencial electromagnético, $F = dA$ (evitamos el nombre '4-potencial', donde la cifra '4' se refiere a la dimensión del espaciotiempo), tiene desventajas de artificiales normas, como una norma de Ludwig Lorenz, y donde la condición para potencial de transportar energía, $(dA)^2 = 0$, no se puede expresar fácilmente en términos del potencial A.

¿Como resolver la condición nula, $F^2 = 0$, (31), en términos de la forma diferencial de onda k (o vector de onda $\mathbf{k}$), y forma diferencial de polarización l, $k^2 = 0 = k \cdot l$? ¿Donde está la energía, y donde está la polarización? dentro de la radiación electromagnética, $F = d\phi \wedge d\psi$, con $F^2 = 0$ (35)? En caso que uno de los gradientes es un vector de luz (lightlike), $(\operatorname{grad}\phi)^2 = 0$, y además, $(\operatorname{grad}\phi) \cdot (\operatorname{grad}\psi) = 0$, entonces, $\mathbf{k} = \operatorname{grad}\phi$, y no lightlike vector de polarización en espaciotiempo es, $\mathbf{l} = \operatorname{grad}\psi$. Una radiación electromagnética donde ninguno de los gradientes es el vector de luz (no lightlike), tiene el vector de onda como sigue, ver Ejercicio B.1,

$$\{(\operatorname{grad}\phi) \cdot (\operatorname{grad}\psi)\}^2 = (\operatorname{grad}\phi)^2 (\operatorname{grad}\psi)^2 \neq 0, \tag{39}$$

$$\mathbf{k} = (\operatorname{grad}\psi)^2 \operatorname{grad}\phi - \{(\operatorname{grad}\phi) \cdot (\operatorname{grad}\psi)\} \operatorname{grad}\psi. \tag{40}$$

A Álgebra de Hermann Grassmann 1844

A.1 Definición (Variedad)**.** La variedad (manifold), es un objeto que tiene dimensión entera, $\in \mathbb{N}$, como por ejemplos los puntos, curvas, superficies, volumenes, etc. Además para ser variedad, requerímos que variedad de dimensión n tiene una cadena de los subvariedades orientables,

$$n \quad \longmapsto \quad \{0 \xleftarrow{\partial} 1 \xleftarrow{\partial} \ldots \xleftarrow{\partial} (n-1) \xleftarrow{\partial} n\} \tag{41}$$

con nilpotente operador de frontera ∂. Una frontera de subvariedad es la sub-variedad de dimensión uno menos. Por lo tanto el concepto de variedad requiere concepto de cadena de subvariedades con nilpotente operador de frontera ∂, $\partial \circ \partial = 0$, 'frontera no tiene frontera'.

Para entender este trabajo, es indispensable darse cuenta que la variedad de dimensión $n \in \mathbb{N}$, tiene subvariedades de las dimensiones desde $0, 1, \ldots,$ hasta n. Las variedades las cuales tienen dimensión de cero son puntos, dimensión de uno son líneas y curvas, dimensión de dos son superficies, etc. Por lo tanto, en dimensión $n \in \mathbb{N}$, tenemos multiformas y multivectores de los grados enteros, $\{0, 1, 2, \ldots, n-1, n\}$.

Denotamos los módulos de los campos de multivectores con número natural de grado $n \in \mathbb{N}$, y los campos de las formas diferenciales con número de grado con estrella, $n^* \in \mathbb{N}$, (como en Figuras 7 y 8). El anillo asociativo y conmutativo de los campos escalares tiene grado cero, $0 = 0^* \in \mathbb{N}$, y siempre la dimemnsión, $\dim_0\{\text{grado} = 0\} \equiv 1$. El anillo de los campos escalares es común para 0-módulo de los campos multivectoriales y para 0^*-modulo de las multi-formas diferenciales. La dimensión de 0-módulo de k-vectores y k^*-covectores, para, $0 \leq k \leq n \equiv$ dimensión de variedad, es dado por coeficiente de binomio, equivalente de triángulo de Blaise Pascal (1623-1662),

$$\dim_0\{\text{grado} = k\} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N},$$
$$(1+1)^n = 2^n = \sum \binom{n}{k}. \tag{42}$$

En triángulo de Pascal, usamos lo siguiente abreviación, donde la álgebra de los campos escalares tiene siempre, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la dimension $\mathbf{1}$, $\forall\, f = f \cdot 1$,

$$n = 1: \quad \begin{array}{ccc} \{x\} & \xrightarrow{d} & \{dx\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \dim} & & {\scriptstyle \dim}\Big\downarrow \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & \mathbf{1} \end{array} \qquad n = 2: \quad \begin{array}{ccc} \{x, y\} & \xrightarrow{d} & \{dx, dy\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \dim} & & {\scriptstyle \dim}\Big\downarrow \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & \mathbf{2} \end{array} \tag{43}$$

Este trabajo espera que el lector conozca la idea principal del álgebra de Grassmann, la cual Hermann Grassmann inventó en su primera monografía en 1844. La tema del álgebra de Grassmann lo desarrollamos en un Curso en Línea de 'Cálculo para electromagnetismo' en el marco de la Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia de la UNAM [Oziewicz, en preparación].

Vale pena mensionar que triángulo de Pascal no debe ser interpretar unicamente como dimensiones de los espacios o modulos (submodulos de una

Figure 1: Triángulo de Blaise Pascal: las dimensiones

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
n=0 & & & & & \mathbf{1} \arrow[dddddlllll, dotted] & & & & \\
n=1 & & & & \mathbf{1} \arrow[rr, "d"] & & \mathbf{1} \arrow[ddddllll, dotted] & & & \\
n=2 & & & \mathbf{1} \arrow[rr, "d"] & & \mathbf{2} \arrow[rr, "d"] & & \mathbf{1} \arrow[dddlll, dotted] & & \\
n=3 & & \mathbf{1} \arrow[rr, "d"] & & \mathbf{3} \arrow[rr, "d"] & & \mathbf{3} \arrow[rr, "d"] & & \mathbf{1} & \\
n=4 & \mathbf{1} \arrow[rr, "d"] & & \mathbf{4} \arrow[rr, "d"] & & \mathbf{6} \arrow[rr, "d"] & & \mathbf{4} \arrow[rr, "d"] & & \mathbf{1} \\
k=0 & & k=1 & & k=2 & & k=3 & & k=4 &
\end{tikzcd}
$$

ágebra de Grassmann), pero originalmente invento por Pascal en 1652 como combinaciones en teoria de probabilidad: numero natural en triangulo dice la intensidad relativa de acoplamiento spin-spin en espectro de Resonancia Magnetica Nuclear RMN.

B Tensor metrico

Un tensor de producto escalar g se define usualmente como una aplicación desde una pareja de vectores a escalar, $\mathbf{v}, \mathbf{u} \xrightarrow{g} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \equiv g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \equiv g(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})$, es decir como morfismo $2 \longmapsto 0$. Para comprender el operador diferencial de gradiente es necesario entender el producto escalar también como isomorfismo (es decir morfismo inversible) desde vectores a co-vectores, $1 \longmapsto 1^*$, y como morfismo gradado de álgebras de Grassmann, que indicamos en Figuras 3, 7, y 8. Por ejemplo si, $\partial_x \equiv \partial/\partial x$, es un campo vectorial como una derivada parcial, grado$(\partial/\partial x) = 1$, por lo tanto la aplicación del producto escalar convierte este campo vectorial en una forma diferencial de grado uno, puede ser a una forma exacta, $g(\partial/\partial x) = dx$. Cabe mencionar que el tensor-morfismo

$$\begin{tikzcd} \{1,2,\dots n\} \ni k \arrow[r, bend left, "g"] & k^* \in \{1^*,2^*,\dots,n^*\} \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Figure 2: Producto escalar g como isomorphismo

g restringído a campos escalares, es identidad.

B.1 Ejercicio. Sean U, W, V tres vectores en dimensión cualquiera. Calcule producto escalar de tri-vector de Grassmann, $(U \wedge W \wedge V)^2$. Respuesta: $(U \wedge W \wedge V)^2 = W^2 (U \wedge V)^2$, donde $(U \wedge V)^2 = (U \cdot V)^2 - U^2 V^2$.

C Orientación y seudo-tensores

El conjunto de todas las formas de volumen constan de las dos clases de orientación. Cada forma de volumen define un isomorfismo de Weyl desde multivectores a multiformas. Por lo tanto la imagen de isomorfismo de Weyl es dependiente de la seleción de orientación. Es por ésta razón, que el isomorfismo de Weyl es de multivectores a seudo-multiformas, es decir, las multiformas las cuales son dependientes de elección de orientación. ¿Como actúa el isomorfismo de Weyl?

Denotamos una forma de volúmen (campo tensorial de los volúmenes) con letra ε (Choquet-Bruhat et al. [1977,1996] uso τ). Por lo tanto un multivector de volúmen lo denotamos como ε^{-1}.

$$\begin{tikzcd} \{1,2,\dots,n\} \ni k \arrow[r, bend left, "\varepsilon"] & (n-k)^* \in \{1^*,2^*,\dots,n^*\} \arrow[l, bend left, "\varepsilon^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Figure 3: La isomorphismo de Weyl

En dimensión $n \in \mathbb{N}$, una gráfica de isomorfismo de Weyl tiene $2n+1$ nodos, donde cada nodo se denota con su *grado*, y no con su dimensión en triángulo de Pascual,

$$\{0, 1, 1^*, 2, 2^*, \ldots, n, n^*\}, \tag{44}$$

y cada flecha significa una acción de una forma de volúmen ε, o acción de un vector de volúmen ε^{-1}. Todas las flechas tienen inverso, pero los obvios inversos y morfismos identidades, los suprimimos en las gráficas. Por lo tanto, isomorfismo de Weyl es un groupoide (donde cada flecha-morfismo tiene inverso), y también es un autómata con $(2n+1)$-estados.

En dimensión uno, tenemos solamente tres nodos, escalares de grado $0 = 0^*$, vectores de grado 1, y covectores de grado 1^*. Por lo tanto una gráfica para dimensión uno, donde se pueden ilustrar flechas de isomorfismo de Weyl, es una gráfica de groupoide con tres nodos $\{0, 1, 1^*\}$ y dos flechas inversibles de Weyl, ver Figura 4.

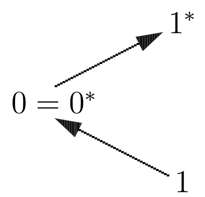

Figure 4: Groupoide de Weyl en dimensión uno

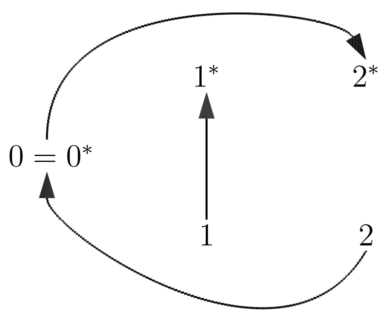

Figure 5: Groupoide de Weyl en dimensión dos

Dejamos al lector deducir de gráficas de groupoide de Weyl en dimensiones tres y cuatro, y más adelante.

D Estrella de Hodge inventado por Grassmann en 1862

Las propiedades electromagnéticas de los materiales 'lineales' (no ferromagnéticos con histéresis, etc.), y también propiedades electromagnéticos el vacío, las relaciones constitutivas, por ejemplo la susceptibilidad eléctrica y magnética, la permitividad y la permeabilidad, etc., se pueden caracterizar convenientemente en términos de estrella-de-Hodge que es un isomorfismo entre multivectores de álgebra de Grassmann. Ver, por ejemplo [da Rocha y Leite Freire 2005].

D.1 Comentario (histórico)**.** Cuando se explica la estrella-de-Hodge, denotada por Hermann Weyl en 1943 como estrella $\star$, se refiere a William V. D. Hodge (1903-1975), que introdujo este isomorfismo en su monografía 'The Theory and Applications of Harmonic Integrals', [Hodge 1941, 1951]. Pero no se recuerda que este isomorfismo de los multivectores lo introdujo por primera vez muy claro y profundo Hermann Grassmann en su segunda monografía en 1862, usando de nombre Ergänzung (complemento o suplemento), denotado por una raya vertical '|' (en lugar de la presente notación de Hermann Weyl's de estrella $\star$), [Grassmann 1862, Capitulo 3, §4-5]. La Raya-de-Grassmann de 1862 $\leftrightsquigarrow$ tiene presente el nombre de la estrella-de-Hodge (de 1941). Misner y Wheeler introdujeron en 1957 otro nombre para estrella, un operador de conjugación de 'dualidad', pero esta dualidad no es funtorial. Grassmann demostró algunas propiedades de su rayo-Ergänzung,

$$\star^2 \equiv \star \circ \star = (\det g) \cdot (-1)^{\text{grado}\cdot\text{co-grado}} \cdot \text{id} \tag{45}$$

Para la dimensin par,

$$\star \circ \star = (-1)^{\cdot\text{grado}} \cdot \text{id}, \tag{46}$$

con comentario que para dimensión dos, la raya-Ergänzung aplicada al vector da interpretación real de número imaginario, $i^2 = -1$. Grassmann introdujo, entre muchos otros conceptos nuevos, también un producto regresivo de multivectores, $a \vee b \equiv \star\{(\star a) \wedge (\star b)\}$.

La Estrella de Hodge es un campo tensorial, y en literatura se encuentran las diferentes definiciones, y no todas las definiciones son equivalentes. Por ejemplo, ver definición explícita-calculadora en [Misner y Wheeler 1957;

Choquet-Bruhat et al., desde 1977, 1996 Capitulo V.4, página 295], donde las propiedades de la estrella son escondidas.

Nosotros preferimos definir la estrella de-Hodge en términos de las siguientes propiedades, que incluyen la formula explícita para calcular.

D.2 Definición. Las dos estrellas-de-Hodge, una estrella sobre multivectores, y otra estrella sobre multiformas, se definen como conmuta con isomorfismo de producto escalar, y con isomorfismo de Weyl,

$$g \circ \star \equiv \star \circ g \equiv \varepsilon_*, \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_* \circ \star \equiv \star \circ \varepsilon_*, \tag{47}$$

como ilustra diagramas conmutativas en Figura 6,

$$\begin{tikzcd}
\text{multi-vectores} \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[d, "\star"] \arrow[dr, "\varepsilon_*"] & \text{multi-formas} \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \arrow[d, "\star"] \arrow[dr, bend left, "g^{-1}"] & \text{multi-vectores} \arrow[l, "\varepsilon_*"] \arrow[d, "\star"] \\
\text{multi-vectores} \arrow[r, bend left, "g"] & \text{multi-formas} \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] & \text{multi-vectores} \arrow[l, "\varepsilon_*"] \arrow[ul, bend left, "g"]
\end{tikzcd}$$

Figure 6: La definición de las estrellas de Hodge $\star$

El lector puede verificar que diagramas conmutativos en Figura 6, son equivalentes, una implica otra. Kocik observed non uniquennes of the Hodge-star (two conventions) and that the metric tensor needs not to be symmetric, we refer to Kocik's WEB-page [Kocik]. Diferente Kocik's convenciones para estrella, son como sigue

$$\begin{aligned} &\text{on multivectors:} \quad \star = \varepsilon_*^{-1} \circ g^{\wedge} \quad \text{o} \quad \star^{-1} = g^{-1\wedge} \circ \varepsilon_* \\ &\text{on multiforms:} \quad \star = \varepsilon_* \circ g^{-1\wedge} \quad \text{o} \quad \star^{-1} = g^{\wedge} \circ \varepsilon_*^{-1} \end{aligned} \tag{48}$$

D.3 Corolario. Sea 1 denota un campo escalar constante. Se deduce que, $\star 1 = \varepsilon$, y además, que la estrella de Hodge entrelazó un operador de creación (dado por representación regular a la derecha 'e' de álgebra de Grassmann), con un operador de anihilación (dado por la dualidad funtorial de pull-back de 'e', es decir por, $i \equiv e^*$), como se presentó en el diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} \text{Grassmann Álg} & \xrightarrow[\text{a la derecha}]{\text{regular } e} & \text{Grassmann Álg} \\ \Big\downarrow \star & & \Big\downarrow \star \\ \text{Grassmann Álg} & \xrightarrow{i \equiv e^*} & \text{Grassmann Álg} \end{array} \tag{49}$$

D.4 Teorema (Grassmann 1862)**.** *En dimensión cualquiera tenemos la siguiente formula,*

$$\star^2 = (\det g)(-1)^{\text{grado} \cdot \text{cogrado}}. \tag{50}$$

D.5 Ejercicio. Sea en dimensión $n \in \mathbb{N}$, X es un k-multi-vector de grado $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Calcule el producto escalar de $(\star X)^2$. Respuesta: $(\star X)^2 = (-1)^{k(n-k)} \varepsilon^2 X^2$.

E Operadores diferenciales - independientes de las coordenadas

La diferencial de Cartan, es una derivación gradada de álgebra de Grassmann de las multiformas diferenciales, con propiedad, $d^2 = 0$. Este propiedad es equivalente al axioma más importante de cálculo integral: frontera de frontera es vacío, o, frontera no tiene frontera, $\partial \circ \partial = \emptyset$, [Henrí Poincaré 1895; Arnold V. I. 1978; Fecko 1997, page 4547, formula (4.13)].

Todos los operadores diferenciales de grado primero, que consideramos en esta obra, la diferencial de Cartan, el gradiente, la divergencia, la rotación = curl, y los altos grados, son los operadores diferenciales independientes de las coordenadas. Estos operadores diferenciales actúan sobre el álgebra de Grassmann de los multi-formas diferenciales, o de los campos multivectoriales, apropiadamente. Textbooks notation is as follows,

$$\begin{aligned} \text{gradiente}, \quad & \text{grad} \equiv \nabla \\ \text{divergencia}, \quad & \text{div} \equiv \nabla \cdot \\ \text{rotación}, \quad & \text{curl} = \text{rot} \equiv \nabla \times . \end{aligned} \tag{51}$$

Todos los estos operadores diferenciales de grado uno, se construye desde de diferencial de Cartan, $d \in \text{der}(\text{álg. de Grassmann})$, ver [Arnold 1978].

F Gradiente es independiente de coordenadas

Los todos campos escalares, en dimensión cualqiera, tienen el grado cero, y la dimensión 1. El Gradiente aumenta grado, gradiente de campo escalar (de grado cero) es un campo vectorial (de grado uno). Análogo, pero menos conocido, el gradiente de un campo vectorial, es un campo bivectorial de grado dos. El Operador diferencial de gradiente, actúa en campos multi-vectoriales y aumenta el grado por uno, como se ilustra en la Figura 7.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1^* \arrow[r, "d"] \arrow[dd, shift left, "g^{-1}"] & 2^* \arrow[r, "d"] \arrow[dd, shift left, "g^{-1}"] & \cdots \\
0 = 0^* \arrow[ur, "d"] \arrow[dr, "\mathrm{grad}"'] & & & \\
 & 1 \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[uu, shift left, "g"] & 2 \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[uu, shift left, "g"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Figure 7: Operador diferencial de gradiente es una derivación de álgebra de Grassmann

El Operador diferencial de gradiente es dependiente de elección de campo tensorial del producto escalar, el cual denotamos con la letra g.

F.1 Definición. El Operador de gradiente de un campo multi-vectorial, por definición, es una composición de tres pasos. Primero de debe convertir el campo multi-vectorial a una multi-forma diferencial, después debemos aplicar el diferencial de Cartan, y finalmente convertir esta forma diferencial a campo multi-vectorial, $\mathrm{grad}_g \;\equiv\; g^{-1} \circ d \circ g \quad \in \mathrm{der}(\mathrm{Grass})$.

F.2 Corolario. $d \circ d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{grad} \circ \mathrm{grad} = 0.$

Si F es uno campo físico (no necesariamente un campo escalar, pero uno campo multivectorial de grado cualquiera), la condición, $\mathrm{grad}\, F = 0$, significa que F tiene potencial, $F = \mathrm{grad}\, A$, (el trabajo se conserva). La razón es que, $(\mathrm{grad})^2 = 0$. Los textos consideran incorrecto que el operador de gradiente se aplique solamente a campos escalares, por lo tanto, en lugar del gradiente de campo vectorial, se usó el operador de rotación (curl) de campos vectoriales, ver Apéndice H. Si X es un campo vectorial, por lo tanto $\mathrm{grad}\, X$ es uno campo bi-vectorial de Grassmann, de grado dos.

En dimensión cuatro, en espacio-tiempo, la ley de Faraday y ley de Gauß magnético, las dos leyes juntas, se pueden expresar como una sola condición, grad $F = 0$, donde el campo electromagnético F es un bivector que es una 'superposición', una 'mezcla', de los campos magnético y eléctrico, [Minkowski 1908, Landau y Lifshitz desde 1941; Ingarden & Jamiołkowski desde 1979],

$$F \simeq \star\{(\text{observador}) \wedge B\} + E \wedge (\text{observador}). \tag{52}$$

Esta ley absoluta, $\operatorname{grad} F = 0$, expresa la conservación del trabajo en el campo electromagnético, y es no-justamente interpretado en términos de, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, como ausencia de monopolos magnéticos, [Cruz Guzmán & Oziewicz 2003].

G Divergencia es independiente de coordenadas

La divergencia de un campo vectorial (de grado uno), es un campo escalar (de grado cero). Análogo, pero menos conocido, la divergencia de un campo bivectorial de grado dos, es uno campo vectorial. El Operador diferencial de divergencia, actúa en campos multi-vectoriales y disminuye grado por uno, como se ilustra en la Figura 8.

$$\begin{tikzcd}
 & 1^* \arrow[dl, "\delta"] \arrow[dd, bend left, "g^{-1}"] & 2^* \arrow[l, "\delta"] \arrow[dd, bend left, "g^{-1}"] & \cdots \arrow[l, "\delta"] \\
0 = 0^* & & & \\
 & 1 \arrow[ul, "\mathrm{div}"] \arrow[uu, bend left, "g"] & 2 \arrow[l, "\mathrm{div}"] \arrow[uu, bend left, "g"] & \cdots \arrow[l, "\mathrm{div}"]
\end{tikzcd}$$

Figure 8: Operador diferencial de divergencia disminuye de grado de multivector de Grassmann

G.1 Definición (Divergencia)**.** El Operador de divergencia de una multiforma diferencial es una composición de los tres pasos, $\delta \equiv \star^{-1} \circ d \circ \star \quad \notin$ der(Grass).

Los Operadores de divergencias de los campos multi-vectoriales (div), y los multi-formas diferenciales (δ), son entrelazados con morfismo de producto escalar, $\operatorname{div} \equiv g^{-1} \circ \delta \circ g \equiv \varepsilon_*^{-1} \circ d \circ \varepsilon_*$. Por lo tanto el operador diferencial de divergencia de los campos multi-vectoriales se puede igualmente definir en términos de forma-de-volumen e isomorfismo de Hermann Weyl. Un campo multivectorial X se llama incompresible si $\operatorname{div} X = 0$.

Otras dos leyes de electromagnéticos, ley de Gauss eléctrico y ley de Ampère-Oersted-Maxwell en vació, expresaron solamente la conservación de densidades de la carga eléctrica y de corriente eléctrica, $\operatorname{div} F = 0$ [Cruz Guzmán y Oziewicz 2003]. El campo físico F con condición $\operatorname{div} F = 0$, se llama el campo no-comprensible. Como consecuencia del axioma $d^2 \equiv 0$, ver Corolario F.2, en cálculo vectorial son conocidas como identidades diferenciales,

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} \equiv 0, \qquad \text{y} \qquad \operatorname{div} \circ \operatorname{rot} \equiv 0. \tag{53}$$

Pero los más importantes son otros dos, que son casi desconocidos,

$$\operatorname{grad} \circ \operatorname{grad} \equiv 0, \qquad \text{y} \qquad \operatorname{div} \circ \operatorname{div} \equiv 0. \tag{54}$$

G.2 Teorema. *El Operador diferencial de divergencia es una derivación del álgebra de Lie de Schouten, de los campos multi-vectoriales,*

$$\operatorname{div}[X, Y] = [\operatorname{div} X, Y] + (-1)^{1+X}[X, \operatorname{div} Y]. \tag{55}$$

G.3 Comentario (histórico)**.** El Operador diferencial de divergencia para grado cualquiera lo considero Brouver en 1906, por lo tanto Weitzenböck en su monografía publicada en 1923, lo llamó operador de divergencia como 'un tensor of Brouver'. Minkowski en 1908, denota este operador como 'lor', y nota la más importante propiedad, $\operatorname{lor} \circ \operatorname{lor} = 0$, la cual en notación en el presente es, $\operatorname{div} \circ \operatorname{div} = 0$. Weyssenhoff en 1938 consideró los operadores diferenciales de divergencia y de rotación también en dimensiones arbitrarias [Weyssenhoff 1938].

Al final de éste Apéndice comentamos que los operadores diferenciales, divergencia y gradiente, son en cierta manera conjugados, $\operatorname{div} \simeq (\operatorname{grad})^*$, porque $i \equiv e^*$,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \circ e_{\mathbf{v}} + e_{\mathbf{v}} \circ \operatorname{grad} &= e_{\operatorname{grad} \mathbf{v}} && \Longleftrightarrow && \operatorname{grad} \in \operatorname{der}(\text{Álg. Grass}) \\ \operatorname{div} \circ i_\alpha + i_\alpha \circ \operatorname{div} &= i_{d\alpha} && \Longleftrightarrow && \operatorname{div} \notin \operatorname{der}(\text{Álg. Grass}) \end{aligned} \tag{56}$$

H Operador diferencial de rotación en dimensión cualquiera

Una terminología 'curl = rotación' para un operador diferencial de grado uno, que introdujo Maxwell 'with great diffidence'. Este operador es independiente de coordenadas, y en dimensión cualquiera se define como una composición en tres pasos,

H.1 Definición. $\operatorname{rot} \equiv \varepsilon_*^{-1} \circ d \circ g^\wedge$. La condición diferencial, $\operatorname{rot} F = 0$, es conocida como el campo F no es rotacional (irrotacional).

Los textos consideran incorrecto que el operador de gradiente se aplique solamente a campos escalares, por lo tanto, en lugar de gradiente de campo vectorial, se usa el operador de rotación (curl) de campos vectoriales. No es conocido que estas dos condiciones, $\operatorname{grad} F = 0$, y, $\operatorname{rot} F = 0$, son equivalentes. Por lo tanto cada campo potencial es automáticamente no-rotacional. Si X es uno campo vectorial, por lo tanto $\operatorname{grad} X$ es uno campo bi-vectorial, de grado dos. En comparación, una rotación de campo vectorial, $\operatorname{rot} X$, es uno campo multivectorial de grado $(n-2)$ donde $n = \dim$, es dimensión de espacio dominio, y en dimensión tres, rotación de campo vectorial es campo seudo-vectorial de grado uno (es dependiente de la orientación para seleccionar).

Queremos aclarar que desaparecerse (dar valor cero) de un operador de gradiente y de operador de rotación son las condiciones totalmente equivalentes, $\operatorname{grad} X = 0$ es lo mismo como $\operatorname{rot} X = 0$. Por lo tanto los conceptos estar ir-rotacional, ser potencial, cerrado (closed), son equivalentes, y equivalentes a un ley de conservación.

H.2 Corolario. Elegimos la suigente convención para estrella de Hodge sobre multiformas, ver Kocik's WEB page,

$$\star \equiv g^\wedge \circ \varepsilon_*^{-1}, \qquad \star^{-1} \equiv \varepsilon_* \circ g^{-1\wedge} \qquad \star^{-1} \simeq \star. \tag{57}$$

En dimensión cualquiera, por el Teorema D.4, tenemos las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} &= \varepsilon^{-1} \circ d \circ \star^{-1} \circ d \circ g, \\ \operatorname{rot} \circ \operatorname{rot} &= \varepsilon^{-1} \circ d \circ \star \quad\ \circ d \circ g, \\ \operatorname{grad} \circ \operatorname{div} &= g^{-1} \circ d \circ \star \circ d \circ \varepsilon, \end{aligned} \tag{58}$$

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{rot} \simeq \pm \operatorname{div} \circ \operatorname{grad}, \qquad \operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} \equiv 0. \tag{59}$$

Recordemos que el campo multivectorial X se llama incompresible si, $\operatorname{div} X = 0$. El campo multivectorial X se llama armónico (o monogenic) si es incompresible y ir-rotacional (potencial), es decir, si,

$$\operatorname{grad} X = 0, \qquad \text{y} \qquad \operatorname{div} X = 0. \tag{60}$$

Referencias

Arnold V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Benjamnin/Cummings, Reading, MA, 1978

Campbell W. P., and T. Morgan, Debye potentials for the gravitational field, Physica **53** (1971) 264–288

Choquet-Bruhat Yvonne, Cécile DeWitt-Morette, with Margaret Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds and Physics, Part I: Basic, Elsevier Amsterdam, 1977, nuevo impresiones, 1996

Cruz Guzmán, José de Jesús, and Zbigniew Oziewicz, Four Maxwell's equations for non-inertial observer, Bulletin de la Société de Sciences et des Lettres de Łodź (2003) Volume LIII, Série: Recherches sur les Déformations. Volume XXXIX. Pages 107–140

Cruz Guzmán, José de Jesús, y Zbigniew Oziewicz, ¿Ninguna influencia de relatividad a electricidad y magnetismo?, Primer Foro acerca de la Enseñanza de la Física para Ingenieros. UNAM, Facultad de Ingeniería, 2004

Ellis George, and Peter A. Hogan, Aspects of asymptotic electromagnetic fields, Annals of Physics **210** (1991) 178–237

Fecko Marián, On 3+1 decompositions with respect to an observer field via differential forms, Journal of Mathematical Physics **38** (9) (September 1997) 4542–4560

García-Olivo R., R. Linares y M., José Luis López-Bonilla, and A. Rangel-Merino, Charged point particles in arbitrary motion, 2006

García-Olivo R., R. Linares y M., José Luis López-Bonilla, and A. Rangel-Merino, Liènard-Wiechert electromagnetic field, Electronic Journal of Theoretical Physics **4** (2007)

Grassmann Hermann, Die Ausdehnungslehre, Verlag Berlin 1862; Extension Theory, American Mathematical Society 2000

Grassmann Hermann, Mathematische und Physikalishe Werke, (herausg. F. Engel). Tres volumenes, cada uno en dos partes, Leipzig, Teubner 1894-1911.

Heaviside Oliver, Electromagnetic Theory, Volume 1, London 1893, 466 páginas

Hogan Peter A., Journal of Mathematical Physics **28** (9) (September 1987) 2089–2093

Ingarden Roman Stanisław, and Andrzej Jamiołkowski (1985) : Classical Electrodynamics. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1979, 1980, 1981. Amsterdam: Elsevier 1985

Jauch Josef Maria, and F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, Springer-Verlag, New York Berlin 1955, 1976

Kholmetskii Alexander L., The Lorentz non-invariance of the Faraday induction law, Apeiron **10** (2003) page 32 and page 118.
Also in: M. C. Duffy, Editor, Moscow PIRT-2003, pages 180–187

Kholmetskii Alexander L., Remarks about the energy flux and momentum of electromagnetic field, Annales de la Fo(u)ndation Louis de Broglie, **29** (2004) 549

Kholmetskii Alexander L., On 'gauge renormalization' in classical electrodynamics, in: M. C. Duffy, Editor, Moscow PIRT-2005, pages 179–188

Kocik Jerzy, Relativistic observer and Maxwell's equations: an example of a non-principal Ehresmann connection, (1997).
http://www.math.siu.edu/jkocik.htm

Landau Lev Davidovich, and Evgenii Mikchailovich Lifshitz, The Classical Theory of Fields, Pergamon Press, 1951, 1975

Lichnerowicz André, Sur les ondes de choc gravitationnelles et électromagnétiques, in: Ondes et Radiations Gravitationnelles, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1974, pages 47–56

Lichnerowicz André, Relativity theory and mathematical physics, in: Astrofisica e Cosmologia, Gravitazione, Quanti e Relatività, Giunti Barbèra, Firenze 1979

Lightman Alan P., William H. Press, Richard H. Price, Saul A. Teukplsky, Problem Book in Relativity and Gravitation, Princeton University Press 1975

Misner Charls W., and John Archibald Wheeler, Annals of Physics **2** (6) (1957) 525–603

Oziewicz Zbigniew, Electric field and magnetic field in a moving reference system (abridged abstract). In: M. R. Adhikari, Editor, Physical Interpretations of Relativity Theory Session, in International Symposium on Recent Advances in Mathematics, Kolkata 2006, pages 47–53

Oziewicz Zbigniew, Electric field and magnetic field in a moving reference system, Review Bulletin of Calcutta Mathematical Society, Volume **16** (1) (2008) 49–66

Oziewicz Zbigniew, Cálculo para electromagnetismo, un Curso en Linea en marco de Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia, en preparación 2007

Robinson Ivor, Null electromagnetic fields, Journal of Mathematical Physics **2** (3) (1961) 290–291

da Rocha Roldao, and Igor Leite Freire, Spacetime deformations and electromagnetism in material media, arXiv:physics/0502012

Stachel J., Physical Review **180** (1969) 1256

Synge John L., Relativity: the special theory, North-Holland Publisher 1965

Torres del Castillo, Method of adjoint operators and Debye potentials, Revista Mexicana de Física **35** (1989) 282–290

Weyssenhoff Jan, Duale Größen, Großrotation, Großdivergenz, und die Stokes-Gauß'schen Sätze in allgemeinen Räumen, Annales Sociedad Polonae Mathematicae **16** (1938) 127–144

Whittaker Edmund T., On the expression of the electromagnetic field due to electrons by means of two scalar potential functions, Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, Volume **1** (1904) 367–372

Yamaleev Robert, Quantum origin of transverse electromagnetic fields, Annales de la Fondation Louis de Broglie, **30** (3-4) (2005) 1–13